Sommes et produits (formulaire)

Sommes simples

- **Nombres de termes :** pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (\text{si } n \geqslant 1) \qquad \sum_{k=m}^{n} 1 = n-m+1$$

- **Somme des premiers entiers, des premiers carrés :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Somme d'une suite géométrique :** pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = x^m \times \frac{1-x^{n-m+1}}{1-x}$$

- **Somme télescopique :** pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ (à savoir retrouver au cas par cas)
- **Formule du binôme de Newton :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Sommes doubles

- Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ un famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

- Dans le cas où $m = n$, alors la somme de la famille de nombres complexes $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ vaut :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Produits

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} c = c^{n+1} \qquad \prod_{k=m}^{n} c = c^{n-m+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Coefficients binomiaux

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$, on a $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. On a les formules suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ \textbf{(symétrie)}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \ \textbf{(formule sans nom)} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \textbf{(triangle de Pascal)}$$