TD08 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

a) $z = (1 - i\sqrt{3})^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ (développer)

b) $z = (1 + 2i)^3 = -11 - 2i$ (développer)

c) $z = \dfrac{1+i}{1-i} = i$ (multiplier le numérateur et le denominateur par la quantité conjuguée de $1 - i$)

d) $z = \dfrac{1-2i}{1+5i} = \frac{-9-7i}{26}$ (quantité conjuguée)

e) $z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (décomposer la notation exponentielle en notation trigonométrique)

f) $z = (a + ib)^3 + (a - ib)^3 = 2a^3 - 6ab^2$ (développer)

g) $\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$

h) $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$, et $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i.$

Donc $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i - \frac{15}{25} + \frac{30}{25}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$

i) Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ et donc $z + \overline{z} = -3$.

Exercice 2:

1. $1 + i\sqrt{3}$.
2. $3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 3:

1. $9 - 7i$;
2. $-6i$;
3. $-0{,}3 + 1{,}1i$;
4. $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$.

Exercice 4:

Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } \frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}.$$

Exercice 5: Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Exercice 6:

a) $|z| = 5$

b) $|z| = 2$

c) $|z| = \dfrac{2}{3}$

d) $|z| = 5\sqrt{26}$ (Utiliser le module d'un produit)

e) $|z| = 125$ (Utiliser le module d'une puissance)

f) $|z| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$ (Utiliser le module d'un quotient)

g) $|z| = 1$ (Utiliser l'égalité des modules d'un complexe et de son conjugué)

h) $|z| = 1$ (Utiliser le module d'une puissance)

Exercice 7:

Pour chaque complexe, déterminer son module puis un argument.

a) On rappelle sur cet exemple la méthode pour obtenir un complexe sous forme exponentielle.
Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$
$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.
Notons θ un argument de z.
Alors $\cos(\theta) = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut choisir $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
Ainsi $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

c) $z = 2e^{-i\pi/6}$

d) $z = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

e) On cherche une écriture exponentielle de chaque parenthèse puis on fait le produit.
$z = (1-i)(1+i\sqrt{3}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

f) On cherche une écriture exponentielle du numérateur et du dénominateur puis on fait le quotient.
$z = \dfrac{1}{(\sqrt{3}-i)^3} = \dfrac{e^{i0}}{8e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}}$

g) On utilise la symétrie des angles opposés
$z = \cos(\frac{\pi}{5}) - i\sin(\frac{\pi}{5}) = e^{-i\frac{\pi}{5}}$

h) On utilise $\sin(\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8})$ et $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8})$
$z = \sin(\frac{\pi}{8}) + i\cos(\frac{\pi}{8}) = e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Exercice 8:

Pour chaque complexe, déterminer son module puis un argument.

a) $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{4}}$ (Utiliser la technique de l'angle moitié (cf exemples du cours). Comme $2\cos(\frac{\pi}{12}) > 0$ il s'agit bien du module)

b) $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$ (De nouveau technique de l'angle moitié)

c) $z = e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sin(\frac{\pi}{24})e^{-i\frac{5\pi}{24}}$ (angle moitié, comme $\sin(\frac{\pi}{24})$ il s'agit bien du module)

d) $z = e^{ia} + e^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}}$ (angle moitié)
Il reste à étudier le signe de $2\cos(\frac{a-b}{2})$.
Comme $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, on en déduit $-\frac{\pi}{2} < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{2}$
ainsi $\cos(\frac{a-b}{2}) > 0$.

e) $z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}} = \frac{\cos(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{b}{2})}e^{i\frac{a-b}{2}}$ (angle moitié, comme $\frac{\cos(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{b}{2})} > 0$ il s'agit bien du module)

Exercice 9:

On considère les nombres complexes $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$

1. $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ d'où $ab = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2. $ab = 1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i$.
3. En comparant les parties réelles et les parties imaginaires des deux écritures, on obtient : $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 10:

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer si les nombres suivants sont réels ou imaginaires purs :
$z-\bar{z} = 2iIm(z)$ donc imaginaire pur.
$z+\bar{z} = 2Re(z)$ donc réel.
$z\bar{z} = |z|^2$ donc réel.
$z^2-(\bar{z})^2 = (z-\bar{z})(z+\bar{z})$ donc imaginaire pur.
$z^2+(\bar{z})^2 = (z+\bar{z})^2-2z\bar{z}$ donc réel comme différence de réels.
$z^2+(\bar{z})^2+z+\bar{z}$ donc réel comme somme de réels.

Exercice 11:

Démonstration par double impplications :
$\boxed{\Leftarrow}$
Si z est réel alors les nombres $z-i$ et $z+i$ sont conjugués donc ont les mêmes modules.
$\boxed{\Rightarrow}$
si $|z-i| = |z+i|$
alors $|z-i|^2 = |z+i|^2$
d'où $(z-i)(\overline{z-i}) = (z+i)(\overline{z+i})$
soit après développement et simplifiaction, $z = \bar{z}$
Autrement dit z est réel.

Exercice 12:

a) 2 solution complexe conjugués $z = \frac{-1-i\sqrt{7}}{4}$ et $\overline{z}$

b) 2 solution complexe conjugués $z = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $\overline{z}$

c) $t^2+t+1=0$
Il n'y a pas de racines évidentes. On calcul le discriminant $\Delta = -3$ et on applique les formules du cours.
On trouve $\boxed{t_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$

d) $x^4+3x^2-4=0$
Soit $x \in \mathbb{C}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation.
On pose $X = x^2$ et on a $X^2+3X-4=0 \Leftrightarrow (X-1)(X+4)=0 \Leftrightarrow X=1$ ou $X=-4$.
On résout alors $x^2=1$ et $x^2=-4$
On obtient finalement $\boxed{S = \{-1, 1, -2i, 2i\}}$

e) Soit $z \in \mathbb{C}$ et S l'ensemble des solutions de l'équation.
$z^4+7z^2+12=0 \Leftrightarrow (z^2+4)(z^2+3)=0 \Leftrightarrow z^2=-4$ ou $z^2=-3$
On obtient finalement $\boxed{S = \{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -2i, 2i\}}$

f) $(\dfrac{z+i}{z-i})^2 - 2(\dfrac{z+i}{z-i})+5=0$
Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$.
On pose $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$ et on résout $Z^2-2Z+5=0$.
On trouve $Z = 1-2i$ ou $Z = 1+2i$
On résout alors $\dfrac{z+i}{z-i} = 1-2i$ et $\dfrac{z+i}{z-i} = 1+2i$
On obtient $\boxed{S = \{-1+i, 1+i\}}$

g) $z^2-2z\cos(\alpha)+1=0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
On obtient $\Delta = 4(\cos(\alpha))^2-4 = -4(\sin(\alpha))^2 \leq 0$
Si $\alpha \equiv 0\ [\pi]$ alors il n'y a qu'une solution réelle : $\frac{2\cos(\alpha)}{2} = \cos(\alpha)$.
Si $\alpha \neq 0\ [\pi]$ alors $\Delta < 0$ et il y a deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$\frac{2\cos(\alpha)-i\sqrt{4(\sin(\alpha))^2}}{2} = \cos(\alpha) - i|\sin(\alpha)|$ et $\cos(\alpha) + i|\sin(\alpha)|$.

Finalement les solutions sont en écriture exponentielle : $\boxed{e^{i\alpha} \text{ et } e^{-i\alpha}}$

Je me perfectionne!

Exercice 13:

On cherche les solutions dans $\mathbb{C}^*$.
L'égalité $|z| = |\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ nous donne $|z|^2 = 1$ soit $|z| = 1$ puisque le module est positif.
alors $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
Par conséquent : $|1 - z| = 1 \Leftrightarrow |1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)| = 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{2 - 2\cos(\theta)} = 1$
$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}$ car la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos(\frac{\pi}{3})$
$\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
Les complexes solutions sont donc $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 14:

1. Démonstration par double implications :
   $\boxed{\Leftarrow}$ Si $x \in \mathbb{R}$, il est clair que $Z = z^2 + 2z - 3 \in \mathbb{R}$ (sommes et produits de réels).
   Si $Re(z) = -1$ alors $\exists b \in \mathbb{R}, x = -1 + ib$
   Alors $Z = (-1 + ib)^2 + 2(-1 + ib) - 3 = 1 - 2ib - b^2 - 2 + 2ib - 3 = -4 - b^2 \in \mathbb{R}$
   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $Z \in \mathbb{R}$
   Alors $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = \overline{z^2 + 2z - 3} = \bar{z}^2 + 2\bar{z} - 3$
   D'où
   $$\begin{aligned} z^2 - \bar{z}^2 + 2(z - \bar{z}) = 0 &\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \text{ ou } z + \bar{z} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } 2Re(z) = -2 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } Re(z) = -1 \end{aligned}$$
2. Démonstration par double implications :
   $\boxed{\Leftarrow}$
   si $z \in \mathbb{R}$, il est évident que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ (somme de réels)
   Si $|z| = 1$ alors $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
   alors $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$
   $\boxed{\Rightarrow}$
   Supposons $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ alors $z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}$
   soit après avoir mis au même dénominateur et effectué le produit en croix : $|z|^2 z + \bar{z} = |z|^2\bar{z} + z$
   d'où en factorisant : $(z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$
   On en déduit $z = \bar{z}$ ou $|z| = 1$, c'est à dire z est réel ou de module 1.
3. On procède par double implications :
   $\boxed{\Leftarrow}$
   Si $z \in \mathbb{R}$ donc $z = \bar{z}$
   Ainsi $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} = z \in \mathbb{R}$
   Si $|u| = 1$ alors $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$ mod $[2\pi]$.
   Posons $Z = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$
   alors $\bar{Z} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}} = \frac{\bar{z}-e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\bar{z}-z}{e^{i\theta}-1} = Z$
   donc $Z \in \mathbb{R}$
   $\boxed{\Rightarrow}$
   $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$
   $\Leftrightarrow z + |u|^2\bar{z} = \bar{z} + |u|^2 z$
   $\Leftrightarrow (\bar{z} - z)(|u|^2 - 1) = 0$
   $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ou $|u| = 1$
   C'est à dire z réel ou de module 1.

Exercice 15:

a) $z = \bar{z}$
Il s'agit ddes nombres réels donc de l'axe des abscisses.

b) $|z| = 2$
Il s'agit du cercle de centre O de rayon 2.

c) $|z - 3i| = 5$
il s'agit du cercle de centre A (d'affixe 3i) de rayon 5.

d) $|z - 1 + i| = |z - 3|$
Il s'agit de la médiatrice de $[BC]$ où B a pour affixe $1 - i$ et C a pour affixe 3.

e) $|\dfrac{z - i}{z - 2 + i}| = 1$
Soit D le point d'affixe i, et E le point d'affixe $2 - i$
Il s'agit donc de la médiatrice de $[DE]$ privée du point E.

f) $|\bar{z} = \frac{4}{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$
Il s'agit du cercle de centre O de rayon 2.

g) $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π
Il s'agit de la demi droite d'origine O dirigée par l'axe des ordonnées (pour les valeurs positives) privée de O.

Exercice 16:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$
   On assimile x et y aux racines d'un polynôme de degré 2.
   Leur somme vaut 2 et leur produit 2.
   x et y sont donc les racines du polynôme $X^2 - 2X + 2$.
   Le discriminant vaut $\Delta = -4$,
   les solutions sont donc $x_1 = 1 - i$ et $x_2 = 1 + i$.
   Il y a donc deux couples de solutions : $\boxed{(1 - i, 1 + i) \text{ et } (1 + i, 1 - i)}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} (u + 1) \times (v - 1) = 1 \\ u + v = 1 \end{cases}$
   On utilise la même méthode que précédemment en considérant que $u + 1$ et $v - 1$ sont les racines de $X^2 - X + 1 = 0$.
   Le dicriminant vaut $\Delta = -3$
   On obtient donc deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
   On a donc soit $\begin{cases} u + 1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ v - 1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} u = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - 1 \\ v = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$
   soit $\begin{cases} v - 1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ u + 1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} v = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ u = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$

3. Peut-on construire un enclos rectangulaire de périmètre $15m$ et d'aire $16m^2$?
   Soit a la longueur du rectangle et b la largeur du rectangle.
   On cherche donc à résoudre $\begin{cases} 2(a + b) = 15 \\ ab = 16 \end{cases}$
   a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2 - \frac{15}{2}X + 16 = 0$
   Le discriminant vaut $\Delta = (\frac{15}{2})^2 - 4 \times 16 < 0$
   Il n'y a pas de solutions réelles donc un tel enclos est impossible.

Exercice 17:

1. pour $z = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\iff (\alpha + i\beta)^2 = 8 - 6i \\
&\iff \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8 - 6i \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10 - \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Les solutions pour $z = 8 - 6i$ sont donc $\omega = 3 - i$ et $-\omega = -3 + i$.
2. Pour $z = 1$ les solutions sont $+1$ et -1.
3. Pour $z = i$ les solutions sont $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
4. Pour $z = 7 + 24i$ les solutions sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$.

Exercice 18: $2 - i$ et $-2 + i$; $5 - i$ et $-5 + i$.

Exercice 19:

1. On pose $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Les solutions de $\omega^2 = z$ sont

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

   mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

   et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

2. De la même façon on obtiendrait :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

Exercice 20:

1. Nous allons utiliser l'écriture exponentielle de $\sqrt{3}-i$ qui est $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
   On résout alors $z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ en cherchant z sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Ainsi on cherche à résoudre $r^2e^{2i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
   Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments égaux modulo 2π.
   D'où $\left\{\begin{array}{l} r^2 = 2 \\ 2\theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \theta \equiv -\frac{\pi}{12}\ \pi \end{array}\right.$
   On a donc deux solutions distinctes : $S = \{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}\}$
2. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.
   Or les solutions de $z^2+z+1 = 0$ sont $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $S = \{1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$.
   ON pouvait aussi précéder comme à la question précédente en écrivant $1 = 1e^{i0}$
3. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.
   On pose $Z = z^3$ et on résout $Z^2 + 7Z - 8 = 0$: on trouve $Z = 1$ ou $Z = -8$
   Il reste donc à résoudre $z^3 = 1$ et $z^3 = -8$
   On peut utiliser le résultat de la question précédente en étudiant :
   $z^3 = 1$ et $(-\frac{z}{2})^3 = 1$
   On obtient donc les solutions $S = \{-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3}\}$

Exercice 21: En règle général, passer par les complexes en utilisant les formules d'Euler.

1. (a) $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ car $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.
   (b) $\sin(x)^3 = -\dfrac{\sin(3x)}{4} + \dfrac{3\sin(x)}{4}$.
   (c) $\cos(x)^2\sin(x) = \dfrac{\sin(3x)}{4} + \dfrac{\sin(x)}{4}$.
   (d) $\cos(2t)\sin(3t) = \dfrac{\sin(5t)}{2} + \dfrac{\sin(t)}{2}$
   (e) $\cos(2a)\sin^2(a) = \dfrac{\cos(2a)}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{\cos(4a)}{4}$
   (f) $\sin(3c)\sin(c) = \dfrac{\cos(2c)}{2} - \dfrac{\cos(4c)}{2}$
2. (a) $\mathrm{H} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos(2x)}{2}dx$. On applique (deux fois) la linéarité de l'intégrale :
   $$\begin{aligned}\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)dx\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$
   $\mathrm{H} = \dfrac{\pi}{4}$.
   (b) $\mathrm{I} = \dfrac{2}{3}$.
   (c) $\mathrm{J} = \dfrac{1}{3}$
   (d) $\mathrm{K} = \dfrac{6}{5}$.
   (e) $\mathrm{L} = -\dfrac{\pi}{2}$.
   (f) $\mathrm{M} = 0$.

Exercice 22: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. On veut calculer la somme

$$S_n(x) = \cos(0x) + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

1. On veut calculer la somme

$$E_n(x) = \mathrm{e}^{i\,0x} + \mathrm{e}^{i\,x} + \cdots + \mathrm{e}^{i\,nx} = (\mathrm{e}^{i\,x})^0 + (\mathrm{e}^{i\,x})^1 + \cdots + (\mathrm{e}^{i\,x})^n \quad \text{(formule de Moivre)}$$

On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\,x}$ et de premier terme $e^{i0x} = 1$.
On connaît la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
Et on sait sait qu'il y a deux cas : si la raison est égale à 1 et si la raison est différente de 1.
On a $x \neq 0[2\pi]$ donc la raison $\mathrm{e}^{i\,x} \neq 1$ et on a :

$$E_n = 1 \times \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$$

2. On utilise la technique de l'angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$E_n = \frac{\mathrm{e}^{i\,\frac{n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{i\,\frac{1}{2}x}} \times \frac{\mathrm{e}^{-i\,\frac{n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{i\,\frac{n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{-i\,\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^{i\,\frac{1}{2}x}}$$

On utilise maintenant les formules d'Euler :

$$E_n = \mathrm{e}^{i\,\frac{n}{2}x} \times \frac{-2\,i\,\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2\,i\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{e}^{i\,\frac{n}{2}x} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc

$$E_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right)$$

Donc :

$$E_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) + i\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

3. Nous allons faire intervenir les nombres complexes en écrivant que :
$\cos(0x) = Re(e^{i0x})$, $\cos(x) = Re(e^{ix})$, $\cos(2x) = Re(e^{i2x})$, etc.

$$S_n = Re(e^{i0x}) + Re(e^{ix}) + Re(e^{i2x}) + \cdots + Re(e^{inx})$$

or comme pour tout complexe z et z' : $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$:

$$S_n = Re(e^{i0x} + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx})$$

La somme S_n sera la partie réelle de la somme E_n.
On en déduit finalement que

$$S_n = \mathrm{Re}(E_n) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 23:

1. Calculer $H_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\left(k\frac{\pi}{7}\right)$

solution :

$$H_n = Im(e^{i0}) + Im(e^{i\frac{\pi}{7}}) + Im(e^{i2\frac{\pi}{7}}) + \cdots + Im(e^{in\frac{\pi}{7}})$$

or comme pour tout complexe z et z' : $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$:

$$H_n = Im(e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{7}} + e^{i2\frac{\pi}{7}} + \cdots + e^{in\frac{\pi}{7}})$$

On est amené à calculer la somme

$$E_n = \mathrm{e}^{i\,0} + \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}} + \cdots + \mathrm{e}^{i\,n\frac{\pi}{7}} = (\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}})^0 + (\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}})^1 + \cdots + (\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}})^n \quad \text{(formule de Moivre)}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{7}} \neq 1$ et de premier terme $e^{i0} = 1$.

$$E_n = 1 \times \frac{1-(e^{i\frac{\pi}{7}})^{n+1}}{1-e^{i\frac{\pi}{7}}}$$

Utilisons la technique de l'angle moitié, on a alors :

$$E_n = \frac{\mathrm{e}^{i\,\frac{(n+1)\pi}{14}}}{\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{14}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-i\,\frac{(n+1)\pi}{14}} - \mathrm{e}^{i\,\frac{(n+1)\pi}{14}}}{\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{14}} - \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{14}}}$$

On utilise maintenant les formules d'Euler :

$$E_n = \mathrm{e}^{i\,\frac{n\pi}{14}} \times \frac{-2\,i\,\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{14}\right)}{-2\,i\,\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)} = \mathrm{e}^{i\,\frac{n\pi}{14}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{14}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

On en déduit finalement que

$$H_n = \mathrm{Im}(E_n) = \sin\left(\frac{n\pi}{14}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{14}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Exercice 24:

1. $E = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{2i\pi}{n+1}}\right)^k$

   Or $e^{\frac{2i\pi}{n+1}} = 1$ équivaut à $\frac{2i\pi}{n+1} \equiv 0[2\pi]$ qui équivaut à $\frac{1}{n+1} \equiv 0[1]$

   Donc $e^{\frac{2i\pi}{n+1}} \neq 1$ puisque $n \geq 1$, on a :

   $E = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n+1}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n+1}}} = 0$

2. $F = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{\frac{2i\pi}{3}})^k$.

   Comme $e^{\frac{2i\pi}{3}} \neq 1$, $F = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}}$

   $G = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\frac{2k\pi}{3}) = Re\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (e^{\frac{2i\pi}{3}})^k\right)$.

   $G = Re\left(\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}}\right)$

   $G = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$ (Technique de l'angle moitié)

Exercice 25:

On linéarise les expressions en utilisant les formules d'Euler et le binôme de Newton. On calcule la valeur des coefficients binomiaux en utilisant le triangle de Pascal.

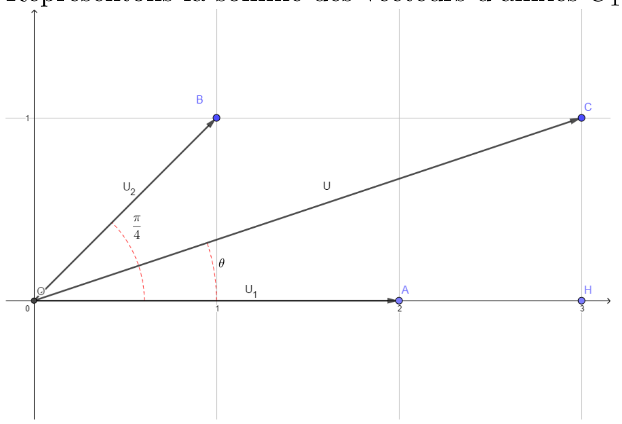
$$\begin{aligned}(\cos(x))^6 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 &= \frac{1}{2^6}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}e^{ikx}e^{-ix(6-k)} \\ &= \frac{1}{64}\left(e^{-6ix} + 6e^{-4ix} + 15e^{-2ix} + 20 + 15e^{2ix} + 6e^{4ix} + e^{6ix}\right) \\ &= \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}\end{aligned}$$

De même $B = \cos(x)(\sin(x))^4 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$

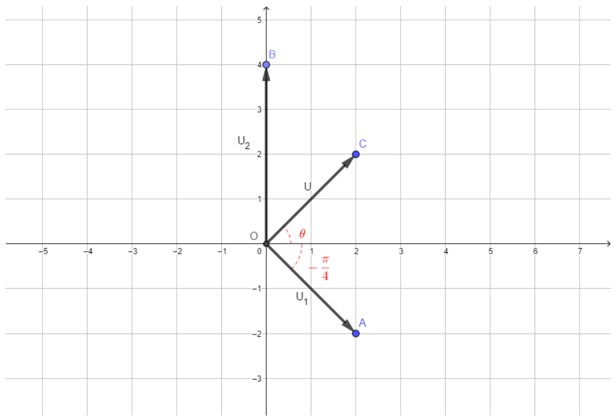
$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \times \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}e^{ikx}\left(-e^{-ix}\right)^{(4-k)} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{-3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} - 4e^{3ix} + e^{5ix} + e^{-5ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix} - 4e^{ix} + e^{3ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}(\cos(5x) - 3\cos(3x) + 2\cos(x))
\end{aligned}$$

Exercice 26:

1. On a $u_1(t) = 2\cos(\frac{2\pi}{3}t)$ et $u_2(t) = \sqrt{2}\cos(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4})$.
   - ⋆ Méthode de Fresnel
     Ces deux tensions sont à la même fréquence donc on peut utiliser la méthode graphique de Fresnel.
     Posons $C_1 = 2e^{i0}$ et $C_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
     Nous voulons trouver $C = Ue^{i\theta} = C_1 + C_2$.
     Représentons la somme des vecteurs d'affixes C_1 et C_2 :

     L'application du théorème de Pythagore dans le triangle OHC permet d'obtenir $U = \sqrt{10}$
     De plus $\tan(\theta) = \dfrac{1}{3}$ d'où $\theta = \arctan(\frac{1}{3})$ soit environ 0,32 radian ou 18,4 (calculatrice).
     Ainsi on conclut $\boxed{u(t) = \sqrt{10}\cos(\frac{2\pi}{3}t + \theta)}$
   - ⋆ Méthode calculatoire
     On a $C = C_1 + C_2 \Leftrightarrow Ue^{i\theta} = 2e^{i0} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
     En égalant les parties réelles et les parties imaginaires on obtient :
     $\left\{\begin{array}{lcl} U\cos(\theta) & = & 2\cos(0) + \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) \\ U\sin(\theta) & = & 2\sin(0) + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} U\cos(\theta) & = & 3 \\ U\sin(\theta) & = & 1 \end{array}\right.$
     En additionnant les carrés de chaque ligne, il vient
     $U^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) = 3^2 + 1^2$
     soit $U^2 = 10 \Leftrightarrow U = \sqrt{10}$ car $U > 0$.
     En faisant le quotient des deux lignes, il vient :
     $\frac{U\sin(\theta)}{U\cos(\theta)} = \frac{1}{3}$ soit $\tan(\theta) = \frac{1}{3}$.
     On retrouve bien les résultats de la méthode de Fresnel.
2. On a $u_1(t) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4})$ et $u_2(t) = 4\cos(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2})$
   - ⋆ Méthode de Fresnel
     Ces deux tensions sont à la même fréquence donc on peut utiliser la méthode graphique de Fresnel.
     Posons $C_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $C_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$.
     Nous voulons trouver $C = Ue^{i\theta} = C_1 + C_2$.
     Représentons la somme des vecteurs d'affixes C_1 et C_2 :



On a par lecture directe $U = U_1 = 2\sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi on conclut $\boxed{u(t) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4})}$

⋆ Méthode calculatoire

On a $C = C_1 + C_2 \Leftrightarrow Ue^{i\theta} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U\cos(\theta) & = & 2\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) + 4\cos(\frac{\pi}{2}) \\ U\sin(\theta) & = & 2\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) + 4\sin(\frac{\pi}{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} U\cos(\theta) & = & 2 \\ U\sin(\theta) & = & 2 \end{array}\right.$$

En additionnant les carrés de chaque ligne, il vient

$U^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) = 2^2 + 2^2$

soit $U^2 = 8 \Leftrightarrow U = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ car $U > 0$.

En faisant le quotient des deux lignes, il vient :

$\frac{U\sin(\theta)}{U\cos(\theta)} = 1$ soit $\tan(\theta) = 1$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

On retrouve bien les résultats de la méthode de Fresnel.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 27:

1. Soit $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{z \text{ réel} \Leftrightarrow z = \overline{z}}$ et $\boxed{z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0}$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} z^2 \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & z^2 = \overline{z^2} \\ & \Leftrightarrow & z^2 = \overline{z}^2 \\ & \Leftrightarrow & z^2 - \overline{z}^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (z-\overline{z})(z+\overline{z}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & z - \overline{z} = 0 \text{ ou } z + \overline{z} = 0 \\ & \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \text{ imaginaire pur} \end{array}$$

Ainsi $\boxed{z^2 \text{ est un nombre réel} \iff z \text{ est un nombre réel ou } z \text{ est un imaginaire pur}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{7}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{7}}$.

Utilisons la technique de l'angle moitié :

L'angle moitié vaut ici $\frac{\frac{3n\pi}{7} + \frac{-n\pi}{7}}{2} = \frac{n\pi}{7}$. On factorise donc l'expression par $e^{i\frac{n\pi}{7}}$.

$a = e^{i\frac{n\pi}{7}}(e^{i\frac{2n\pi}{7}} + e^{-i\frac{2n\pi}{7}})$

$a = e^{i\frac{n\pi}{7}} \times 2\cos(\frac{2n\pi}{7})$ d'après la formule d'Euler.

Ainsi $\boxed{a = 2\cos(\frac{2n\pi}{7})e^{i\frac{n\pi}{7}}}$.

Si $\cos(\frac{2n\pi}{7}) > 0$ alors il s'agit de l'écriture exponentielle de a.

Or $\cos(\frac{2n\pi}{7}) > 0$ si et seulement si $\frac{2n\pi}{7} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, c'est à dire si et seulement si

$n \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{7}{4} + 7k, \frac{7}{4} + 7k[$.

Ainsi $\boxed{2\cos(\frac{2n\pi}{7})e^{i\frac{n\pi}{7}} \text{ est l'écriture exponentielle de } a \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \equiv -1[7] \text{ ou } n \equiv 0[7] \text{ ou } n \equiv 1[7]}$

Sinon $\cos(\frac{2n\pi}{7}) < 0$, on a alors

$a = -2\cos(\frac{2n\pi}{7}) \times (-1)e^{i\frac{n\pi}{7}} = -2\cos(\frac{2n\pi}{7}) \times e^{i\pi}e^{i\frac{n\pi}{7}} = \boxed{-2\cos(\frac{2n\pi}{7}) \times e^{i(\frac{n\pi}{7}+\pi)}}$

(b) a réel $\Leftrightarrow \arg(a) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{n\pi}{7} = 0[\pi] \Leftrightarrow n = 0[7]$.

$\boxed{\text{Ainsi } a \text{ est réel si et seulement si } n \text{ est un multiple de } 7}$

(c) On pose $n = 7$ (ce qui signifie d'après la question 3b) que a est réel)

L'équation (♣) devient :

$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = 2\cos(2\pi)e^{i\pi} = -2 \Leftrightarrow z = -i\sqrt{2}$ ou $z = i\sqrt{2}$

Ainsi $\boxed{\text{les solutions de l'équation (♣) sont } z = -i\sqrt{2} \text{ et } z = i\sqrt{2}}$.

Ces solutions sont des imaginaires purs, ce qui d'après la question 2) est cohérent avec z^2 réel.

(d) On pose $n = 14$ (ce qui signifie d'après la question 3b) que a est réel)

L'équation (♣) devient :

$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = 2\cos(4\pi)e^{i2\pi} = 2 \Leftrightarrow z = -\sqrt{2}$ ou $z = \sqrt{2}$

Ainsi $\boxed{\text{les solutions de l'équation (♣) sont } z = -\sqrt{2} \text{ et } z = \sqrt{2}}$.

Ces solutions sont des réels, ce qui d'après la question 2) est cohérent avec z^2 réel.

(e) On pose maintenant $n = 5$ (ce qui signifie d'après la question 3b) que a n'est pas réel car 5 n'est pas un multiple de 7).

L'équation (♣) devient :

$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = 2\cos(\frac{10\pi}{7})e^{i\frac{5\pi}{7}} = -2\cos(\frac{10\pi}{7})e^{i(\frac{5\pi}{7}+\pi)}$ (d'après la question 3a) $-2\cos(\frac{10\pi}{7}) > 0$).

Posons $z = re^{i\theta}$ avec r un réel strictement positif et θ un réel.

$$\begin{aligned} z^2 = -2\cos(\tfrac{10\pi}{7})e^{i(\frac{5\pi}{7}+\pi)} &\Leftrightarrow (re^{i\theta})^2 = -2\cos(\tfrac{10\pi}{7})e^{i(\frac{5\pi}{7}+\pi)} \\ &\Leftrightarrow r^2e^{i2\theta} = -2\cos(\tfrac{10\pi}{7})e^{i\frac{12\pi}{7}} \qquad \text{d'après la formule de Moivre} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = -2\cos(\frac{10\pi}{7}) \\ 2\theta \equiv \frac{12\pi}{7}[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{-2\cos(\frac{10\pi}{7})} \\ \qquad \text{car la racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et r¿0} \\ \theta \equiv \frac{6\pi}{7}[\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{les solutions de l'équation (♣) sont } \sqrt{-2\cos(\frac{10\pi}{7})}e^{i\frac{6\pi}{7}} \text{ et } \sqrt{-2\cos(\frac{10\pi}{7})}e^{i\frac{13\pi}{7}}}$

4. On a vu à la question 3b) que a est réel si et seulement si n est un multiple de 7.

```
n=eval(input(" donner un nombre entier naturel: "))
if (n%7==0):    #le reste de la division euclidienne est nul
    print("le nombre a est réel")
else :
    print("le nombre a n'est pas réel")
```

Exercice 28:

1. $w = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$ et en utilisant la formule de Moivre $w^5 = \mathrm{e}^{i2\pi} = 1$
2. On reconnait la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\begin{aligned} 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 &= \frac{1-w^5}{1-w} && (1) \\ &= \frac{1-1}{1-w} && (2) \\ &= 0 && (3) \end{aligned}$$

3. On considère le nombre complexe $\alpha = w + w^4$.

(a) $\alpha^2 + \alpha - 1 = \left(w + w^4\right)^2 + w + w^4 - 1 = w^2 + 2w^5 + w^8 + w + w^4 - 1$.

Or $w^8 = w^3$ et $w^5 = 1$. On obtient $\alpha^2 + \alpha - 1 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$.

(b) On remarque $w^4 = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}} = \mathrm{e}^{i(\frac{-2\pi}{5}+2\pi)} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{w}$.

Donc $\alpha = w + w^4 = w + \overline{w} = 2\Re(w) \in \mathbb{R}$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

Le discriminant de l'équation est $5 > 0$. L'équation a deux solutions réelles $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(d) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

D'après les question précédentes, $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Comme $\alpha = 2\Re(w) = 2\cos(\dfrac{2\pi}{5})$

On a $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Comme $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) > 0$, on obtient $\cos(\dfrac{2\pi}{5}) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4. **Informatique.**

```
from import random *
a=randint(1,6)

b=randint(1,6)

c=randint(1,6)
delta=b**2-4*a*c
reponse=input("Ecris R si tu penses que les racines sont réelles
et C si tu penses qu'elles sont complexes")

if (reponse ==R  and delta=>0) or (reponse= =C  and delta<0) :

     print("gagné")
else :
     print("perdu")
```