TD09 – Correction

Exercice 1:

1. Les primitives sur $\mathbb{R}_*^+$ sont $a \mapsto \frac{5}{6}a^6 - \ln(a) - \frac{3}{6a^6} + \frac{2}{15}(5a)^{\frac{3}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
   On pense que $\frac{1}{a^7} = a^{-7}$ et que pour $a \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt{5a} = (5a)^{\frac{1}{2}}$.
   Enfin on peut remarquer que la forme des primitives trouvée peut être réécrite qui donne une primitive sur $\mathbb{R}^+$:
   $a \mapsto \frac{5}{6}a^6 - \ln(a) - \frac{1}{2a^6} + \frac{2}{15}5a\sqrt{5a} + C$ où $C \in \mathbb{R}$, la fonction $a \mapsto 5a\sqrt{5a}$ étant dérivable en 0.
   Toute simplification faite : $a \mapsto \frac{5}{6}a^6 - \ln(a) - \frac{1}{2a^6} + \frac{2}{3}a\sqrt{5a} + C$ où $C \in \mathbb{R}$
2. Les primitives sur $\mathbb{R}_*^+$ sont $x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3x\ln(3x)-3x}{3} - \frac{x^{-8}}{-8} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
   Ce qui après simplification donne $x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + x\ln(3x) - x + \frac{1}{8x^8} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
   On n'oublie pas que $\frac{1}{x^9} = x^{-9}$. Pour déterminer une primitive de $x \mapsto \ln(3x)$ on s'est servi de la primitive que l'on connaît de $x \mapsto \ln(x)$. Appelons la $g : x \mapsto x\ln(x)$. Donc une primitive de $x \mapsto \ln(3x)$ est $x \mapsto \frac{g(3x)}{3}$.
   Une autre manière de procéder afin de gérer ce coefficient 3 est de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$. Une primitive de $x \mapsto \ln(3x)$ est donc $x \mapsto \ln(3)x + x\ln(x) - x$ qui est égale à la primitive que nous avons trouvée.
3. Les primitives sur $\mathbb{R}_*^+$ sont $x \mapsto -\frac{4\sqrt{3x}}{3} + \frac{x^8}{24} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Ce qui peut se réécrire :
   $x \mapsto -\frac{4\sqrt{3x}}{3} + \frac{x^8}{24} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$
4. Les primitives sur $\mathbb{R}$ sont $x \mapsto \frac{\ln(|x^2+\cos(2x)+2|)}{2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \cos(2x) + 2 \geq 1$ donc on peut réécrire notre primitive : $x \mapsto \frac{\ln(x^2+\cos(2x)+2)}{2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ et cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque que la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$).
5. Il faut savoir que la dérivée de tan est $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, remarquons que :
   $$\frac{4}{\cos^2(x)\tan^4(x)} = 4 \times \frac{1}{\cos^2(x)}\big(\tan(x)\big)^{-4}$$
   Donc les primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont $x \mapsto -\frac{4\big(\tan(x)\big)^{-3}}{3} + C$, ou écrit autrement :
   $x \mapsto -\frac{4}{3\big(\tan(x)\big)^3} + C$.
6. Les primitives sur $\mathbb{R}$ sont $u \longmapsto -2\,e^{\cos(u)} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
7. Les primitives sur $\left]-\infty, \frac{1}{7}\right[$ sont $x \longmapsto -\frac{2\sqrt{1-7x}}{7} + \frac{\sin(3x)}{3} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
8. En écrivant l'expression sous la forme $2t(1+t^2)^{-3}$, on trouve que les primitives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme $F(t) = \frac{(1+t^2)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(1+t^2)^2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
9. Les primitives sur $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$ sont $u \longmapsto \frac{-1}{4(2u+5)^2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$ et les primitives sur $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ sont $u \longmapsto \frac{-1}{4(2u+5)^2} + C'$ où $C' \in \mathbb{R}$

Exercice 2:

1. Par somme, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc f admet des primitive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Les primitives de f sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{4}x + \ln(-x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ et les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{4}x + \ln(x) + C'$ où $C' \in \mathbb{R}$. On cherche la primitive F qui s'annule en $a = 1$, c'est à dire telle que $F(1) = 0$.
   Sur $]0, +\infty[$ ($1 \in]0, +\infty[$), on a vu que les primitives étaient de la forme $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{4}x + \ln(x) + C'$ où $C' \in \mathbb{R}$. Il faut donc prendre $C' = -1$. La primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par $\forall x \in]0, +\infty[$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - \frac{1}{4}x + \ln(x) - 1$.

Remarque : si l'on parle de primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ s'annulant en 1, il en existe une infinité et elles sont de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 - \dfrac{1}{4}x + \ln(x) - 1 \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 - \dfrac{1}{4}x + \ln(x) + C \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues (la fonction $x \longmapsto x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction racine carrée est continue). On sait alors que g admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On reconnaît ici une expression du type $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Plus exactement, on a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

On sait que que les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G de la forme $G(x) = \sqrt{x^2+3} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. On cherche la primitive G de g s'annulant en 1. Il s'agit donc de trouver la constante C telle que $G(1) = 0$. On trouve que $C = -2$. La primitive cherchée est donc $G : x \longmapsto \sqrt{x^2+3} - 2$.

3. h est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On reconnait la forme $u'\mathrm{e}^u$. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont de les fonctions H de la forme $H(t) = \mathrm{e}^{t^2} + C$, où $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver la primitive de h qui s'annule en -1, on prend $C = -\mathrm{e}$. La primitive de h qui s'annule en -1 est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}$

4. La primitive de k qui s'annule en π est la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Exercice 3:

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de la fonction f sont les fonctions de la forme : $F(x) = \ln(1+x^2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc g admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de la fonction g sont les fonctions de la forme : $G(x) = \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})$ avec $C \in \mathbb{R}$

$h(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x}\ln(x)$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de la fonction h sont les fonctions de la forme : $H(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) = \dfrac{1}{3}3\cos(x)\sin^2(x)$

La fonction k est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc k admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de la fonction k sont les fonctions de la forme : $K(x) = \frac{1}{3}\sin(x)^3$ avec $C \in \mathbb{R}$

$l(x) = \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

La fonction l est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (quotient de fonction continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc l admet des primitives sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Les primitives de la fonction l sont les fonctions de la forme : $L(x) = \ln(\ln(x)) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$m(x) = 3x\sqrt{1+x^2} = \dfrac{3}{2}2x(1+x^2)^{1/2}$

La fonction m est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.) Donc m admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de la fonction m sont les fonctions de la forme : $M(x) = (1+x^2)^{3/2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4:

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3 = \frac{1}{8}4(6x-2)(3x^2-2x+3)^3$
   Les primitives sont les fonctions de la forme : $F(x) = \frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4 + C$

2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} = \frac{1}{6}(-2(3x^2-3)(x^3-3x+1)^{-3})$
   Les primitives sont les fonctions de la forme : $F(x) = \frac{1}{6}(x^3-3x+1)^{-2} + C$
3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}$
   Les primitives sont les fonctions de la forme $F(x) = \sqrt{x(x-2)} + C$
4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x}$
   Les primitives sont les fonctions de la forme $F(x) = \frac{12}{\ln}(\ln(x)) + C$

Exercice 5:

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$

$\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(\ln(x))^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\ln(2))^{3/2}$

Exercice 6:

1. $I = \ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$
2. $J = 2\ln(2) - \ln(3)$
3. On utilise le fait que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et on trouve que $K = -\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
4. $L = \left[\dfrac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$

Exercice 7:

1. On pose pour tout $x \in [0\ ;\ 2\pi]$,
$$u(x) = x \qquad v(x) = \tfrac{1}{3}\sin(3x)\ .$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$ donc pour tout $x \in [0\ ;\ 2\pi]$,
$$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = \cos(3x)\ .$$
   On peut donc effectuer une intégration par partie.
$$I = \left[\frac{x}{3}\sin(3x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\sin(3x)dx = 0.$$
2. On pose pour tout $t \in [0\ ;\ 2]$,
$$u(t) = t \qquad v(t) = 2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}+2}\ .$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\ ;\ 2]$ et pour tout $t \in [0\ ;\ 2]$,
$$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}+2}\ .$$
   On peut donc effectuer une intégration par partie.
$$J = \left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}+2}\right]_0^2 - \int_0^2 2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}+2}dt = 4\mathrm{e}^3 - 4e^3 + 4 = 4$$
3. On pose pour tout $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$,
$$u(x) = 2x+4 \qquad v(x) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x-1)\ .$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$,
$$u'(t) = 2 \qquad v'(t) = \sin(2x)\ .$$
   On peut donc effectuer une intégration par partie.
$$K = \left[-\frac{(2x+4)}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(2x)dx = \frac{\pi}{2} + 4$$

4. On pose pour tout $x \in [-1\ ;\ 2]$,
$$u(x) = t^2 \qquad v(t) = \mathrm{e}^{t^2}\ .$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1\ ;\ 2]$ et pour tout $x \in [-1\ ;\ 2]$,
$$u'(x) = 2t \qquad v'(x) = 2t\mathrm{e}^{t^2}\ .$$
On peut donc effectuer une intégration par partie.
$$L = \left[t^2\mathrm{e}^{t^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 2t\mathrm{e}^{t^2}dt = 4\mathrm{e}^4 - \mathrm{e} - \mathrm{e}^4 + \mathrm{e} = 3\mathrm{e}^4$$

Exercice 8:

1. Faire deux intégrations par parties : avec le choix $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{3x}$ au début, on trouve que $I = \mathrm{e}^{3\pi} + 1 - 9I$ et donc $I = \dfrac{\mathrm{e}^{3\pi}+1}{10}$.
2. On fait deux intégrations par parties en dérivant à chaque fois le polynôme. On trouve $J = 1 - \dfrac{5e^{-2}}{2}$.
3. Après deux intégrations par parties (en intégrant l'exponentielle), on trouve que $K = -1 + 2e^{\frac{\pi}{4}} - 4K$ et donc $K = \dfrac{-1+2e^{\frac{\pi}{4}}}{5}$.

Exercice 9:

1. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut calculer, par exemple,
$$F(x) = \int_1^x (2t+1)\ln(t)\mathrm{d}t \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$
Il s'agit de la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. On procède par intégration par parties (en posant $u'(t) = 2t+1$ et $v(t) = \ln(t)$; ne pas oublier la rédaction et dire que les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un certain intervalle). On trouve que $F(x) = (x^2+x)\ln(x) - \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{3}{2}$ et donc les primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto (x^2+x)\ln(x) - \frac{x^2}{2} - x + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$
2. La fonction admet des primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car elle est continue sur cet intervalle. On calcule par exemple
$$F(x) = \int_0^x \frac{\theta}{\cos(\theta)^2}\mathrm{d}\theta \qquad \text{pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
à l'aide d'une intégration par parties. Avec le choix $u(\theta) = \theta$ et $v'(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)^2}$, on trouve que $F(x) = x\tan(x) + \ln(\cos(x))$ et donc les primitives de la fonction sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sont de la forme $x \longmapsto x\tan(x) + \ln(\cos(x)) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
3. On cherche les primitives de la fonction sur $\mathbb{R}$ (la fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\cos(3t)\mathrm{d}t$ à l'aide de deux intégrations par parties (en dérivant le polynôme). On trouve que les primitives sont de la forme
$$x \longmapsto \frac{x^2\sin(3x)}{3} + \frac{2x\cos(3x)}{9} - \frac{2\sin(3x)}{27} + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut calculer $F(x) = \int_1^x \sin(\ln(t))\mathrm{d}t$ (primitive s'annulant en 1). On a besoin de deux intégrations par parties. Pour la première, on pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin(\ln(t))$. On aboutit après les deux intégrations par parties à $F(x) = x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - F(x)$. On isole ensuite $F(x)$ et on trouve que les primitives de $x \longmapsto \sin(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto \frac{x(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))}{2} + C$$
où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 10:

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. On commence par réduire au même dénominateur :
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2}$$
On procède alors par identification : on ne peut avoir l'égalité $\dfrac{(a+b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ que si $a+b = 0$ et $-2a-b = 1$. On est alors ramené à la résolution du système $\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 0 \\ -2a & - & b & = & 1 \end{array}\right.$ dont la résolution conduit à $a = -1$ et $b = 1$. Finalement,
$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$
(b) On utilise la décomposition précédente pour calculer l'intégrale proposée. On trouve que $K = 2\ln(3) - 3\ln(2)$.
2. (a) En procédant par identification, on trouve que $a = b = 1$.
(b) En utilisant la décomposition précédente, on obtient $I = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

Exercice 11:

Notons I l'intégrale à calculer. On commence par étudier le signe de $|x^2 - x|$ suivant les valeurs de x : l'expression sous la valeur absolue est positive sur $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty$ et négative sur $[0, 1]$. D'après la relation de Chasles,on a donc
$$I = \int_{-1}^0 |x^2 + x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |3x - x^2|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |x^2 + x|\,\mathrm{d}x$$
On étudie ensuite le signe de $x^2 + x$ et $3x - x^2$ sur les intervalles d'intégration précédents pour calculer les trois intégrales ci-dessus. On trouve que l'intégrale vaut $\dfrac{31}{6}$.

Exercice 12:

1. Le nombre d'individu après une heure est
$$W(1) = \int_0^1 10^2 \mathrm{e}^{0,1t} dt + 10^3 = 10^3 \times (\mathrm{e}^{0,1} - 1) + 10^3 = 10^3 \times \mathrm{e}^{0,1}$$
2. Le nombre d'individu après une heure est
$$W(2) = \int_0^2 10^2 \mathrm{e}^{0,1t} dt + 10^3 = 10^3 \times (\mathrm{e}^{0,2} - 1) + 10^3 = 10^3 \times \mathrm{e}^{0,2}$$

Exercice 13:

1. Le volume d'air au bout de 2,5 secondes est
$$V(2,5) = \int_0^{2,5} \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{5} dt = \left[-\frac{5}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{5}\right]_0^{2,5} = \frac{10}{\pi}.$$
Le volume d'air au bout de 5 secondes est
$$V(5) = \int_0^5 \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{5} dt = \left[-\frac{5}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{5}\right]_0^5 = 0.$$

2. Comme d est continue sur $\mathbb{R}$ V est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall T \in \mathbb{R},\ \ V(T) = \left[-\frac{5}{\pi}\cos\frac{2\pi t}{5}\right]_0^T = \frac{5}{\pi} - \frac{5}{\pi}\cos\frac{2\pi T}{5}.$$

V est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de période 5. On peut donc étudier V sur un intervalle de longueur 5. Prenons l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. La dérivée de V' est

$$\forall T \in \mathbb{R},\ \ V'(T) = d(t).$$

L'étude du signe de V' sur $[0\ ;\ 5]$ nous donne que V est croissante sur $[0\ ;\ 2,5]$ et décroissante sur $[2,5\ ;5\ ]$.

3. La fonction V est 5 périodique. On retrouve le caractère cyclique de l'acte de respirer ainsi que la durée du cycle. Le modèle ne contredit pas les observations.

Exercice 14:

On rappelle que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$$

Partie A : premiers calculs

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\mathrm{e}}$ d'où $\boxed{I_0 = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}}$.

2. On a $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x) \,\mathrm{d}x$. On calcule cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Posons $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. On a alors $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}\,]$ donc on peut intégrer par parties sur cet intervalle et on a :

$$I_1 = \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}}$$

d'où $\boxed{I_1 = \dfrac{2\,\mathrm{e}^3 + 1}{9}}$.

Partie B : convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $x \in [1, \mathrm{e}]$, on a $\ln(x) \geqslant 0$ (car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(1) = 0$). Donc $\ln(x)^n \geqslant 0$ et comme $x \geqslant 0$ (car $x \geqslant 1$), on a $x^2\ln(x)^n \geqslant 0$. Comme $\mathrm{e} \geqslant 1$ (les bornes d'intégrations sont *dans le bon sens*), on a par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{I_n \geqslant 0}$.
   (b) Soit $x \in [1, \mathrm{e}\,]$. On a $\ln(x)^{n+1} - \ln(x)^n = \ln(x)^n(\ln(x) - 1)$. Or on a déjà vu que $\ln(x)^n \geqslant 0$ et $\ln(x) \leqslant \ln(\mathrm{e}\,)$ (car $x \leqslant \mathrm{e}$ et car la fonction ln est croissante sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}\,]$), c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant 1$, soit encore $\ln(x) - 1 \leqslant 0$. On a donc $\ln(x)^{n+1} - \ln(x)^n \leqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{\ln(x)^{n+1} \leqslant \ln(x)^n}$.
   (c) Pour tout $x \in [1, \mathrm{e}\,]$, on a $x^2\ln(x)^{n+1} \leqslant x^2\ln(x)^n$ d'après l'inégalité précédemment obtenue et car $x^2 \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on a donc (comme $1 \leqslant \mathrm{e}$) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)^n\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\boxed{I_{n+1} \leqslant I_n}$. On en conclut donc que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

2. On sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et d'après la question 1., elle est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

Partie C : recherche de la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. (a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}\,]$ comme différence de fonctions qui le sont et pour tout $x \in [1,\mathrm{e}\,]$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}\,x} \geqslant 0$ car $x \in [1,\mathrm{e}\,]$. On en conclut que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}\,]$.

x	1		e
f	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0

   (b) D'après le tableau de variation de f, pour tout $x \in [1,\mathrm{e}\,]$, on a $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x) - \dfrac{x}{\mathrm{e}} \leqslant 0$, soit encore $\boxed{0 \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}}}$ car on sait que $x \geqslant 1$ donc $\ln(x) \geqslant 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà établi dans la partie précédente que $I_n \geqslant 0$. Soit $x \in [1,\mathrm{e}\,]$. On sait que $\ln(x) \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}}$ donc, en élevant à la puissance n, il vient $\ln(x)^n \leqslant \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^n}$ puis, en multipliant par $x^2 \geqslant 0$, on obtient $x^2\ln(x)^n \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{\mathrm{e}^n}$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^{n+2}}{\mathrm{e}^n}\,\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad I_n \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^{n+2}}{\mathrm{e}^n}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^{n+2}}{\mathrm{e}^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+3}}{(n+3)\,\mathrm{e}^n}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^{n+3}-1}{(n+3)\,\mathrm{e}^n} = \frac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-n}}{n+3}$$

Finalement, on a bien $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-n}}{n+3}}$.

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-n}) = \mathrm{e}^3$. Comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+3) = +\infty$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-n}}{n+3} = 0}$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } 0}$$

Partie D : vitesse de convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$. Posons $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)^{n+1}$. Alors $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \dfrac{(n+1)\ln(x)^n}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}\,]$ donc on peut intégrer par parties sur cet intervalle et on a

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{(n+1)x^2\ln(x)^n}{3}\,\mathrm{d}x$$

d'où $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n}$ (en sortant le $n+1$ de l'intégrale).

2. On isole nI_n dans la relation de récurrence précédente. On a $\dfrac{n+1}{3}I_n = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - I_{n+1}$ donc $\dfrac{n}{3}I_n = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - I_{n+1} - \dfrac{I_n}{3}$ d'où, en multipliant par 3 : $nI_n = \mathrm{e}^3 - 3I_{n+1} - I_n$. Or on sait d'après la partie précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}^3}$.

Exercice 15:

1. La fonction f_α est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 (pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-t \in \mathbb{R}$). De plus $f_\alpha(-t) = -te^{-\alpha|-t|} = -te^{-\alpha|t|} = -f_\alpha(t)$. On en conclut donc que $\boxed{f_\alpha \text{ est impaire}}$.
2. ⋆ **Supposons dans un premier temps que $x \geqslant 0$.** Dans ce cas, pour tout $t \in [0, x]$, on a $f_\alpha(t) = te^{-\alpha t}$. Nous allons utiliser une intégration par parties en posant $u'(t) = e^{-\alpha t}$ et $u(t) = \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}$ ainsi que $v(t) = t$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :
$$\int_0^x f_\alpha(t)dt = \left[\frac{-t}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \left[\frac{-1}{\alpha^2} e^{-\alpha t}\right]_0^x$$
c'est-à -dire
$$\boxed{\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{-1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}}$$
⋆ **Supposons dans un second temps que $x < 0$.** Dans ce cas, pour tout $t \in [x, 0]$, on a $f_\alpha(t) = te^{\alpha t}$. Nous allons utiliser une intégration par parties en posant $u'(t) = e^{\alpha t}$ et $u(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$ ainsi que $v(t) = t$ et $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$ et on a
$$\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{\alpha} e^{\alpha t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} - \left[\frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha t}\right]_0^x$$
c'est-à -dire
$$\boxed{\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}}$$
3. La primitive de la fonction f_α s'annulant en 0 est la fonction F_α définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\alpha(x) = \int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$
Or pour $x \geqslant 0$, on a
$$\frac{|x|}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha^2} = \frac{-x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{-1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}$$
De plus pour $x \leqslant 0$, on a
$$\frac{|x|}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha^2} = \frac{x}{\alpha} e^{\alpha x} + \frac{-1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}$$
Finalement, pour tout nombre réel x, nous obtenons
$$\boxed{F_\alpha(x) = -\frac{|x|}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha^2}}$$
4. On cherche à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{-1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}\right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0$ car $\alpha > 0$. De plus, $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ par croissances comparées. On en déduit donc que
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2}}$$
5. On a $\displaystyle\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = F_\alpha(x) - F_\alpha(0) = F_\alpha(x)$. Or d'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^2}$.
Par unicité de la limite, on a donc $\frac{1}{\alpha^2} = 1$ soit $\boxed{\alpha = 1}$ puisque $\alpha > 0$.