Déterminer une solution (particulière) de l'équation différentielle

$$y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos(3x))\, e^{-2x}.$$

Résolvons l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2x^2 + (2x + 1 + \cos(3x))\, e^{-2x}$. dans $\mathbb{R}$.

- Résolution de l'équation homogène $(E_h) : y' + 2y = 0$ dans $\mathbb{R}$. :
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_h) est :

$$S_h = \left\{x \longmapsto C\, e^{-2x}\, ;\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Méthode de variation de la constante :
  On cherche une solution particulière de (E) de la forme suivante :

$$f_0(x) = \lambda(x)\, e^{-2x} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \text{ dérivable sur } \mathbb{R}$$

La fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_0'(x) = \lambda'(x)e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ Calculons $f_0'(x) + 2f_0(x)$:

$$\begin{aligned} f_0'(x) + 2f_0(x) &= \lambda'(x)e^{-2x} - 2\lambda(x)e^{-2x} + 2\lambda(x)e^{-2x} \\ &= \lambda'(x)e^{-2x} \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de (E) donc on cherche f_0 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) + 2f_0(x) = 2x^2 + (2x + 1 + \cos(3x))\, e^{-2x}.$$

C'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)e^{-2x} = 2x^2 + (2x + 1 + \cos(3x))\, e^{-2x} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = 2x^2e^{2x} + 2x + 1 + \cos(3x)$$

On commence par déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x + 1 + \cos(3x)$.
On peut prendre $x \mapsto x^2 + x + \dfrac{1}{3}\sin(3x)$
Il reste à déterminer une primitive de $f_1 : x \mapsto 2x^2e^{2x}$. On va pour cela effectuer une double intégration par parties.
Notons F_1 la primitive f_1 qui s'annule en 0 Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_1(x) = \int_0^x 2t^2e^{2t}\ \mathrm{d}t$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v(t) = e^{2t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v'(t) = 2e^{2t} \end{cases}$$

Comme u, v sont de classes $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
On effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \left[t^2e^{2t}\right]_0^x - \int_0^x 2te^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= x^2e^{2x} - \int_0^x 2te^{2t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On effectue une deuxième intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_0^x 2te^{2t}\,\mathrm{d}t$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v(t) = e^{2t} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v'(t) = 2e^{2t} \end{array}\right.$$

Comme u, v sont de classes $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

On effectuer une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int_0^x 2te^{2t} \,\mathrm{d}t &= \left[te^{2t}\right]_0^x - \int_0^x e^{2t} \,\mathrm{d}t \\ &= xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On trouve

$$F_1 : x \mapsto x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière qui convient est la fonction

$$f_0 : x \mapsto \left(x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{3}\sin(3x)\right) e^{-2x} = x^2 - x + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x^2 - x - \frac{1}{3}\sin(3x)\right) e^{-2x}.$$