TD10 – Correction

Exercice 1:

1. L'équation $(E) : y' - 3y = 1$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont l'équation homogène associée est $(H) : y' - 3y = 0$. D'après le cours, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \right. \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), on sait qu'il suffit d'en connaître une solution particulière. On remarque que la fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{1}{3}$ est solution de (E). D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle, on conclut que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{3} + k\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \right. ; k \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. L'équation $(E) : 2f' + 4f = -3$ est équivalente à l'équation $(E) : f' + 2f = -\dfrac{3}{2}$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont l'équation homogène associée est $(H) : f' + 2f = 0$. D'après le cours, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right. \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), on sait qu'il suffit d'en connaître une solution particulière. On remarque que la fonction constante $x \longmapsto -\dfrac{3}{4}$ est solution de (E). D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle, on conclut que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{3}{4} + k\,\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \right. ; k \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation $(E) : \dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} + k[A] = 0$ est une équation différentielle homogène linéaire du premier ordre à coefficients constants. On sait que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ [A] : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & C\,\mathrm{e}^{-kx} \end{array} \right. ; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 2:

1. $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\sin(x)} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.
3. $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.
4. $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{t^4}{4}-2t^2} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.
5. $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto \dfrac{C}{\ln(x)} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 3:

1. On trouve $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{x^2/2} ; C \in \mathbb{R} \right\}$. On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. Ainsi on cherche une solution sous la forme $f_1(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2}$. En dérivant, on obtient pour tout nombre réel x, $C'(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2/2}$ d'où $C(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} + k$
Ainsi $\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{x^2/2} + \mathrm{e}^{x^2} ; C \in \mathbb{R} \right\}$.

2. On trouve $\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto C\,\mathrm{e}^{1/x}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$. À l'aide de la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de la forme $f_1(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{1/x}$. On trouve, en dérivant $C'(x) = \dfrac{1}{x^3}$ d'où $C(x) = \dfrac{-1}{2x^2} + k$
Finalement, $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{1/x} - \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{2x^2}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Toujours en utilisant la méthode de variation de la constante, on obtient
$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(C + \ln(1+\mathrm{e}^x))\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$
4. On trouve $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{C}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$.
5. Ici la recherche de solution particulière est évidente. On trouve $f_1 = -1$. D'où $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$.
6. À l'aide de la méthode de variation de la constante, on obtient
$$S = \left\{t \longmapsto \frac{C}{t} + \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$
7. L'équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On normalise l'équation
$$(1-x^2)y' + 2xy = \frac{(1-x^2)^2}{x+2} \iff y' + \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{1-x^2}{x+2} \quad (E)$$
L'équation homogène associée à (E) est
$$y' + \frac{2x}{1-x^2}y = 0 \quad (E_h).$$
L'ensemble de ses solutions sur $]-1,1[$ est
$$\mathcal{S}_h = \left\{x \longmapsto C\mathrm{e}^{\ln(1-x^2)} \,|\, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \longmapsto C(1-x^2) \,|\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$
On cherche une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = C(x)(1-x^2)$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$
La fonction y_p est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $y_p'(x) = C'(x)(1-x^2) - 2xC(x)$.
$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-1,1[&\iff \forall x \in]-1,1[, \quad yp'(x) + \frac{2x}{1-x^2}y_p(x) = \frac{1-x^2}{x+2} \\ &\iff \forall x \in]-1,1[, \quad C'(x)(1-x^2) - 2xC(x) + \frac{2x}{1-x^2}C(x)(1-x^2) = \frac{1-x^2}{x+2} \\ &\iff \forall x \in]-1,1[, \quad C'(x)(1-x^2) = \frac{1-x^2}{x+2} \\ &\iff \forall x \in]-1,1[, \quad C'(x) = \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$
On peut prendre $C : x \longmapsto \ln(x+2)$.
Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto \ln(x+2)(1-x^2)$.
D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solution de (E) sur]-1,1[est
$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto (\ln(x+2) + C)(1-x^2) \,|\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 4:

1. On dispose d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (que nous noterons (E)) dont l'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 5 = 0$. Son discriminant vaut $4 - 20 = -16$. Cette équation du second degré admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont $-1 + 2\,\mathrm{i}$ et $-1 - 2\,\mathrm{i}$. L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \longmapsto (A\cos(2x) + B\sin(2x))e^{-x}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

2. L'équation $(E) : \ddot{a} + \dot{a} - 6a = 2$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation homogène associée est $(H) : \ddot{a} + \dot{a} - 6a = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r - 6 = 0$. Son discriminant vaut $25 > 0$ donc elle admet deux racines réelles distinctes : 2 et -3. L'ensemble des solutions de (H) est alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{-3x}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Une solution particulière de (E) étant la fonction constante $f_0 : x \longmapsto -\dfrac{1}{3}$, le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) fournit :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3} + A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{-3x}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

3. On dispose d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (notée (E)) dont léquation homogène associée est $(H) : y'' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, les solutions étant $\pm\,\mathrm{i}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x)\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

De plus, une solution particulière de (E) est la fonction constante $f_0 : x \longmapsto 3$ donc, d'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E), on obtient

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \longmapsto 3 + A\cos(x) + B\sin(x)\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

4. On dispose d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) dont l'équation homogène est $(H) : \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 6y = 0$. L'équation caractéristique associée à (H) est $r^2 + r - 6 = 0$. Son discriminant vaut $25 > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont 2 et -3. On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par ailleurs, une solution particulière de (E) est la fonction constante $f_0 : t \longmapsto -\dfrac{1}{6}$. Le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) nous donne alors

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto -\frac{1}{6} + A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

5. On dispose d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) dont l'équation homogène est $(H) : f'' - 2f' = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r = 0$, soit encore $r(r - 2) = 0$. Cette équation admet deux racines réelles distinctes : 0 et 2. Donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{2t}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par ailleurs, une solution particulière de (E) est la fonction linéaire $f_0 : t \longmapsto \dfrac{5}{2}t$. Le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) nous donne alors

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto \frac{5}{2}t + A + B\,\mathrm{e}^{2t}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

6. L'équation (E) : $y'' - 2y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette équation admet pour racine double $r = 1$ dont l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto (\alpha + \beta x)\,\mathrm{e}^{x}\,;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7. On peut traiter cette équation différentielle du second ordre sans avoir recours aux résultats vus en cours. On l'intègre directement : si $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable, alors

$$\begin{aligned} z'' = 4 &\iff \big(\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = 4x + C\big) \\ &\iff \big(\exists (C, D) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = 2x^2 + Cx + D\big) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $z'' = 4$ est donc

$$\boxed{\left\{ x \longmapsto 2x^2 + Cx + D\,;\ (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 5:

1. On a $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{-x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$. En procédant par identification, on trouve les coefficients du polynôme. On obtient

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 + x\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

2. On a $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$. On procède par identification pour trouver la solution particulière. On obtient

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x} + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{3x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

3. On a $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{-x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

   Par identification, on trouve comme solution particulière $f_0 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos(x)$. On a donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\cos(x)\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

4. On a $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-2x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$. Par identification on trouve comme solution particulière $x \mapsto \dfrac{-1}{9}\,\mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$. On a finalement

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

5. On a $\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{-2x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$. On trouve après identification $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$. On a ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{-x}\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 6:

1. On trouve $S_H = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-x}\,;\ C \in \mathbb{R} \right\}$. On applique le principe de superposition pour trouver une solution particulière. Ainsi on cherche une solution particulière pour l'équation différentielle $y' + y = 1$ et une autre pour $y' + y = \mathrm{e}^{x}$. On trouve pour la première la solution évidente $f_1 = 1$ et pour la seconde la solution évidente $f_2 : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ donc $f_1 + f_2 : x \longmapsto 1 + \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ est une solution particulière de l'équation étudiée, d'où $\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}\,;\ C \in \mathbb{R} \right\}$.

2. On trouve $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto Cx\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$. On applique le principe de superposition pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle. Ainsi on cherche une solution particulière pour $y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{x}$ et une autre pour $y' - \frac{1}{x}y = x^3$. On trouve pour la première la solution évidente $f_1 = -3$ et pour la seconde la solution polynomiale $f_2 : x \longmapsto \frac{1}{3}x^4$ donc $f_1 + f_2 : x \longmapsto -3 + \frac{1}{3}x^4$ est une solution particulière de l'équation étudiée, d'où $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto Cx - 3 + \frac{1}{3}x^4\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 7:

1. On commence par résoudre l'équation différentielle $(E) : 3y' + 4y = -1$ qui est équivalente à $y' + \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3}$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. L'équation différentielle homogène associée est $(H) : y' + \frac{4}{3}y = 0$, qui est équivalente à $y' + \frac{4}{3}y = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est donc
$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$
De plus, une solution de (E) est la fonction constante $f_0 : x \longmapsto -\frac{1}{4}$. D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), on en déduit que cet ensemble est
$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f_C : x \longmapsto -\frac{1}{4} + C\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$
On sait qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy. On cherche donc la valeur de C pour laquelle $f_C(1) = 1$, c'est-à-dire telle que $-\frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}} = 1$ soit $C = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$. La solution cherchée est donc
$$\boxed{f : x \longmapsto \frac{-1}{4} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}}$$

2. On note $(\mathcal{C})$ ce problème de Cauchy. Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Le discriminant est strictement positif et ses racines sont 1 et 2. On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est
$$\mathcal{S}_H = \left\{y : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{2x}\,;\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
On sait ensuite que le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution. On cherche donc les constantes A et B telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a $y(0) = A + B = 1$ et comme
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + 2B\,\mathrm{e}^{2x}$$
on a $y'(0) = A + 2B = 0$. On trouve donc que $A = 2$ et $B = -1$. On en déduit que la solution au problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ est la fonction
$$\boxed{y : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}}$$

3. On note $(\mathcal{C})$ ce problème de Cauchy. Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $(E) : f'' + 4f = 1$. L'équation homogène associée est $(H) : f'' + 4f = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4 = 0$. Elle admet pour solutions les nombres complexes conjugués $-2\,\mathrm{i}$ et $2\,\mathrm{i}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est
$$\mathcal{S}_H = \left\{f : x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)\,;\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E). D'après le théorème fondamentale, l'ensemble des solution de (E) est
$$\mathcal{S}_E = \left\{f : x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4}\,;\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On sait ensuite que le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution. On cherche donc les constantes A et B telles que $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$. On a $f(0) = A = -2$ et comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) = 4\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

on a $f'(0) = 2B = 0$, ce qui nous donne $B = 0$. On en déduit que la solution au problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ est la fonction

$$\boxed{f : x \longmapsto -2\cos(2x) + \frac{1}{4}}$$

Exercice 8:

1. Il s'agit d'une équation différentielle homogène. On trouve

$$\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto \frac{C}{\cos(x)}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Comme un problème de Cauchy admet une unique solution, il existe une unique solution vérifiant $y(0) = 1$. On a : $\begin{cases} y(x) = \dfrac{C}{\cos(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d'où $\dfrac{C}{\cos(0)} = 1$ soit $C = 1$. Finalement, la solution du problème de Cauchy est $y : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

2. On a $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto C\ln(x)\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$. On a pour solution particulière évidente $f_1 = -4$ d'où

$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto C\ln(x) - 4\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On veut que $y(\mathrm{e}\,) = 1$ donc $C\ln(\mathrm{e}^1) - 4 = 1$ soit $C = 5$. Finalement, la solution du problème de Cauchy est $y : x \longmapsto 5\ln(x) - 4$.

3. On a $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$. On a une solution particulière évidente $f_1 = 2$ d'où

$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} + 2\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On veut que $y(0) = 1$ donc $C + 2 = 1$ soit $C = -1$. Finalement, la solution du problème de Cauchy est $y : x \longmapsto 2 - \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$.

Exercice 9:

1. On a $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{2x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\right\}$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution y de cette forme vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Alors A et B doivent vérifier le système $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$. On obtient finalement $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$.

2. On a $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)\,;\, A, B \in \mathbb{R}\right\}$. En cherchant une solution particulière de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$, on trouve $\dfrac{1}{3}\sin(x)$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(x)\,;\, A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution y de cette forme vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les nombres réels A et B doivent alors vérifier le système $\begin{cases} A = 0 \\ 2B + \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$. On obtient finalement $y : x \longmapsto \dfrac{-1}{6}\sin(2x) + \dfrac{1}{3}\sin(x)$.

Exercice 10:

1. Si y correspond à la taille d'un individu, alors la vitesse de croissance correspond à y'. La taille maximale est L. Donc la taille manquante correspond à la fonction $L - y$. Dire que la vitesse de croissance est proportionnelle à la taille manquante signifie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $y' = k(L - y)$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $y'(t) = k(L - y(t))$ soit $y'(t) + ky(t) = kL$.
2. Notons (E) l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $y' + ky = kL$. L'équation différentielle homogène associée est $(H) : y' + ky = 0$. On sait que l'ensemble des solutions de (H) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha\,\mathrm{e}^{-kt} \end{array} \right. \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

De plus, une solution particulière de (E) est la fonction constante L. D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & L + \alpha\,\mathrm{e}^{-kt} \end{array} \right. ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. (a) La fonction f modélisant la taille de l'espèce de maïs est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = L + \alpha\,\mathrm{e}^{-kt}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $L = 180$ cm. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = 180 + \alpha\,\mathrm{e}^{-kt}$$

On sait que $y(0) = 0$, ce qui nous donne la valeur de α : $\alpha = -180$. Par ailleurs, le 15 juillet correspond au temps $t = 14$. Par hypothèse $y(14) = \dfrac{L}{2} = 90$ cm. On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y(14) = 90$. On résout :

$$\begin{aligned} y(14) = 90 \iff 180 - 180\,\mathrm{e}^{-14k} = 90 &\iff \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-14k} \\ &\iff -\ln 2 = -14k \\ &\iff k = \frac{\ln 2}{14} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement,

$$\boxed{f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 180\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{14}t}\right) \end{array} \right.}$$

(b) La taille maximale étant 180 cm, on résout l'inéquation $f(t) \geq 178$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} f(t) \geq 178 &\iff 180\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{14}t}\right) \geq 178 \\ &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{14}t} \geq \frac{89}{90} \\ &\iff \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{14}t} \leq \frac{1}{90} \\ &\iff -\frac{\ln 2}{14}t \leq -\ln(90) \quad (\text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff t \geq \frac{14\ln(90)}{\ln 2} \quad (\approx 90,886) \end{aligned}$$

Donc la maïs aura atteint sa taille maximale à 2 cm près au bout du 91$^{\text{ème}}$ jour.

Exercice 11:

1. Notons T_A la température ambiante. Si T désigne la température du corps, alors T' est la vitesse de refroidissement du corps. Cette vitesse est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant, c'est-à-dire à $T - T_A$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{T' = k(T - T_A)}$$

2. Dans cette question $T_A = 20°\text{C}$. L'équation différentielle vérifiée par la température T du café est $(E) : T' = k(T - 20)$, ce qui se réécrit encore $T' - kT = -20k$. Résolvons cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. L'équation homogène associée est $(H) : T' - kT = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{kt}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}$$

De plus, une solution particulière de (E) est la fonction constante $t \longmapsto 20$ donc, d'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E), on a

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto 20 + C\,\mathrm{e}^{kt}\,;\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Au temps $t = 0$, le café est à $80°\text{C}$ donc $T(0) = 80$, ce qui fournit la valeur de C : $C = 60$. Par hypothèse, on sait également que $T(2) = 60$. Ceci va nous permettre de trouver la valeur de k. On a

$$\begin{aligned}
T(2) = 60 &\iff 20 + 60\,\mathrm{e}^{2k} = 60 \\
&\iff \mathrm{e}^{2k} = \frac{2}{3} \\
&\iff 2k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{car la fonction ln est strictement monotone sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff k = \frac{\ln 2 - \ln 3}{2} \\
&\iff k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \; (\approx 0,2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{T : t \longmapsto 20 + 60\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\frac{t}{2}}}$$

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\frac{t}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$.

On cherche le temps t_1 qui correspond à la température $40°\text{C}$:

$$\begin{aligned}
20 + 60\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\frac{t_1}{2}} = 40 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\frac{t_1}{2}} = \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)\frac{t_1}{2} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_*^+ \\
&\Leftrightarrow t_1 = \frac{2\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Donc elle pourra boire son café au bout de $\dfrac{2\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 5,41$ minutes (5 minutes et 30 secondes à peu près).

Exercice 12:

1. On sait que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre N de noyaux de carbone 14 encore présents. Ce nombre de noyau est positif et la vitesse de désintégration est négative puisque pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire que

$$N'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\overbrace{N(t+h) - N(t)}^{<0}}{\underbrace{h}_{>0}} < 0$$

On en déduit donc que $\boxed{\lambda < 0}$.

2. La vitesse de désintégration du carbone 14 est N'. D'après les donnnées de l'énoncé, on a $\boxed{N' = \lambda N}$ Cette équation différentielle, qui se réécrit $(E) : N' - \lambda N = 0$, est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,;\,C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Si on note N_0 le nombre de noyaux de carbone 14 dans le fragment d'os (on a donc $N_0 = N(0)$), on en déduit que la solution de l'équation différentielle est

$$\boxed{N : t \longmapsto N_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}}$$

3. La demi-vie $t_{0,5}$ est telle que $N(t_{0,5}) = \dfrac{N_0}{2}$. On a

$$\begin{aligned} N(t_{0,5}) = \frac{N_0}{2} &\iff N_0\,\mathrm{e}^{\lambda t_{0,5}} = \frac{N_0}{2} \\ &\iff \mathrm{e}^{\lambda t_{0,5}} = \frac{1}{2} \qquad \text{(car } N_0 \neq 0 \\ &\iff \lambda t_{0,5} = -\ln 2 \qquad \text{(car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff \boxed{t_{0,5} = -\frac{\ln 2}{\lambda}} \end{aligned}$$

4. On sait ici que $t_{0,5} = 5730$. La connaissance de la demi-vie permet de trouver la valeur de λ. En effet, d'après la question 3., on a $\lambda = -\dfrac{\ln 2}{5730}$. On cherche t tel que $N(t) = 0,71N_0$. On résout :

$$\begin{aligned} N(t) = 0,71N_0 &\iff N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = 0,71N_0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5730}t} = 0,71 \qquad \text{(car } N_0 \neq 0) \\ &\iff -\frac{\ln 2}{5730}t = \ln(0,71) \qquad \text{(car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff t = -\frac{5730\ln(0,71)}{\ln 2} \approx 2831 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{le fragment d'os a approximativement 2831 ans}}$.

Exercice 13:

1. On sait que la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ qui est le domaine de dérivabilité de la fonction ln. Par composition, la fonction $z = \ln \circ y$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $z' = \dfrac{y'}{y}$. Comme $y' = -ky(H - \ln y)$, on obtient en divisant par y (qui est une fonction ne s'annulant pas) :

$$\frac{y'}{y} = -k(H - \ln y) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z' = -k(H - z)}$$

2. On note (E) l'équation différentielle $z' = -k(H-z)$ soit encore $z' - kz = -kH$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont l'équation homogène est $z' - kz = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & K\,\mathrm{e}^{kt} \end{array} \right. \qquad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière de (E) est la fonction constante $t \longmapsto H$ donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & H + K\,\mathrm{e}^{kt} \end{array} \right. ;\, K \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. Soit N une solution de l'équation différentielle de l'énoncé. On a montré qu'alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(N(t)) = H + K\,\mathrm{e}^{kt}$$

et donc, en composant par la fonction exponentielle, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N(t) = \mathrm{e}^{H+K\,\mathrm{e}^{kt}}}.$$

qui est bien strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
On a donc prouvé que si une solution N définie sur $[0, +\infty[$ strictement positive existe elle sera de la forme précédente.
Prouvons que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{H+K\,\mathrm{e}^{kt}}$ est la composée de la fonction $t \mapsto H + Ke^{kt}$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (même sur $\mathbb{R}$ si on la définissait sur $\mathbb{R}$) et de la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{H+K\,\mathrm{e}^{kt}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(t) = Kk\mathrm{e}^{kt} f(t).$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$-kf(t)\,(H - \ln(f(t))) = -kf(t)\left(H - H - K\,\mathrm{e}^{kt}\right) = Kk\mathrm{e}^{kt} f(t).$$

et donc la fonction f vérifie bien l'équation différentielle. L'équation différentielle admet donc une unique solution strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ qui est la fonction N écrite précédemment.

Exercice 14: On a affaire à une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $mr^2 - (m^2+1)r + m = 0$. Son discriminant, noté Δ_m, vaut

$$\Delta_m = (m^2+1)^2 - 4m^2 = (m^2+1-2m)(m^2+1+2m) = (m-1)^2(m+1)^2 \geq 0$$

Le discriminant est nul si et seulement si $m \in \{-1, 1\}$. On raisonne par disjonction de cas.

- ⋆ **Premier cas :** on suppose que $m \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$. Dans ce cas, $\Delta_m > 0$ donc l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$\frac{m^2+1-(m-1)(m+1)}{2m} = \frac{1}{m} \qquad \text{et} \qquad m$$

L'ensemble des solutions de (E_m) est donc

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}_m} = \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{m}} + B\,\mathrm{e}^{mx}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- ⋆ **Deuxième cas :** on suppose que $m = 1$. Dans ce cas, $\Delta_1 = 0$ et l'équation caractéristique admet une racine double qui est 1. L'ensemble des solutions de (E_1) est alors

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}_1} = \left\{x \longmapsto (A + Bx)\,\mathrm{e}^{x}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- ⋆ **Troisième cas :** on suppose que $m = -1$. Dans ce cas, $\Delta_{-1} = 0$ et l'équation caractéristique admet une racine double qui est -1. L'ensemble des solutions de (E_{-1}) est alors

$$\mathcal{S}_{\mathrm{E}_{-1}} = \left\{x \longmapsto (A + Bx)\,\mathrm{e}^{-x}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On en conclut donc que l'ensemble des solutions de (E_m) est

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathrm{E}_m} = \begin{cases} \left\{x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\frac{x}{m}} + B\,\mathrm{e}^{mx}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\} & \text{si } m \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\} \\ \left\{x \longmapsto A + B\,\mathrm{e}^{mx}\,;\,(A, B) \in \mathbb{R}^2\right\} & \text{si } m \in \{-1, 1\} \end{cases}}$$

Exercice 15:

1. On note (E) cette équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\iff 1 - 4Q^2 > 0 \qquad (\text{car } \frac{\omega_0^2}{Q^2} > 0) \\ &\iff Q^2 < \frac{1}{4} \\ &\iff Q \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\end{aligned}$$

On raisonne maintenant par disjonction des cas.

⋆ **Premier cas :** $Q \in \left] -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right[$

Dans ce cas, $\Delta > 0$ et donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes qui sont

$$-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$$

soit

$$-\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \qquad \text{et} \qquad -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto \alpha\, \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1-4Q^2}\right)t} + \beta\, \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1-4Q^2}\right)t} ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⋆ **Deuxième cas :** $Q \in \left\{ -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right\}$

Dans ce cas, $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique admet une racine double qui vaut $-\dfrac{\omega_0}{2Q}$. L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto (\alpha t + \beta)\, \mathrm{e}^{\frac{-\omega_0}{2Q} t} ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⋆ **Troisième cas :** $Q \in \mathbb{R} \setminus \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right]$

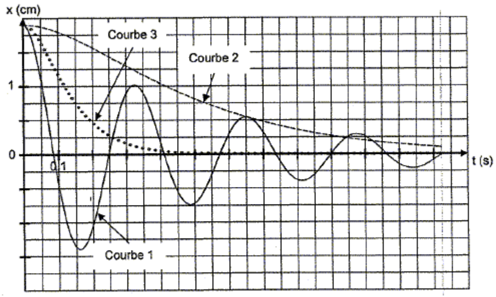
Dans ce cas, $\Delta < 0$. L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjuguées qui sont

$$-\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\,\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{i}\,\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto \left[\alpha \cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\, t \right) + \beta \sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}\, t \right) \right] \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Le régime pseudo-périodique correspond au cas où le discriminant est strictement négatif (solutions en cosinus, sinus), le régime apériodique correspond au cas où le discriminant est strictement positif et le régime critique correspond au cas où le discriminant est nul.



Courbe 1 : régime pseudo-périodique ; courbe 2 : régime critique ; courbe 3 régime apériodique.

Exercice 16: De la deuxième équation on tire $x' = y'' - \mathrm{e}^{-t}$, puis en remplaçant dans la première équation, on obtient l'équation différentielle $y'' + y = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$. La résolution de cette équation donne pour (pour y) :

$$\mathcal{S}_y = \left\{ t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

On en déduit alors les solutions pour x :

$$\mathcal{S}_x = \left\{ t \longmapsto A\sin(t) - B\cos(t) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 17:

1. Sur l'intervalle I, $y \in]0, 100[$ donc $3y \ln\left(\frac{100}{y}\right) \neq 0$

   Ainsi $(E) \iff -\frac{1}{3} \times \frac{-\frac{y'}{y}}{\ln(100) - \ln(y)} = 1$

2. On remarque que $-\frac{y'}{y}$ est la dérivée de $\ln(100) - \ln(y)$.
   On en déduit donc par primitivation :
   $(E) \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \ln(|\ln(100) - \ln(y)|) = t + C$ où $C \in \mathbb{R}$
   Ainsi $\ln(\frac{100}{y}) = e^{-3t-3C}$
   puis $\frac{100}{y} = e^{e^{-3t-3C}}$
   Soit $y(t) = \frac{100}{e^{e^{-3t-3C}}}$

Exercice 18: On pose $y : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y'(x) = f(x)$. L'équation devient $2y' = 3xy$ et on obient $\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2}\,;\ C \in \mathbb{R} \right\}$. Mais $y(0) = 0$ ce qui impose $C = 0$. Finalement, seule la fonction nulle convient.

Exercice 19:

1. De la deuxième équation on tire $x' = y'' - \mathrm{e}^{-t}$, puis en remplaçant dans la première équation, on obtient l'équation différentielle $y'' + y = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$. La résolution de cette équation donne pour (pour y) :

   $$\mathcal{S}_y = \left\{ t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

   On en déduit alors les solutions pour x :

   $$\mathcal{S}_x = \left\{ t \longmapsto A\sin(t) - B\cos(t) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Par soustraction des deux premières équations, on obtient les équations suivantes $\left\{ \begin{array}{r} x' - y' = -2z \\ z' = 2(x - y) \end{array} \right.$.
   On en déduit $z'' = 2(x' - y') = -4z$. On résout cette équation différentielle et on obtient :

   $$\mathcal{S}_z = \left\{ t \longmapsto A\cos(2t) + B\sin(2t)\,;\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

On obtient ensuite $y' - y = 2A\cos(2t) + 2B\sin(2t) + t$. On trouve y en résolvant l'équation grâce au principe de superposition :

$$\mathcal{S}_y = \left\{t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\,t} - t - 2t - 2 - \frac{2}{5}(A+B)\cos(2t) + \frac{2}{5}(2A-3B)\sin(2t) | A, B, C \in \mathbb{R}\right\}$$

On exprime enfin x grâce à la formule $x = \dfrac{1}{2}(z'(t) + 2y(t))$.

Exercice 20:

1. On pose $z : x \longmapsto xy(x)$ soit $y : x \longmapsto \dfrac{z(x)}{x}$. On trouve que y vérifie l'équation $y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x}$. On en déduit après deux dérivations $y'' = \dfrac{z''}{x} - \dfrac{2z'}{x} + \dfrac{2z}{x^3}$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient $z'' + 2z' + z = 0$. D'où
$$\mathcal{S}_z = \left\{x \longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x}\,;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$
et finalement $\mathcal{S}_y = \left\{x \longmapsto (A + \dfrac{B}{x})\,\mathrm{e}^{-x}\,;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$.
2. On pose $x = \mathrm{e}^{\,t}$ et $z(t) = y(\mathrm{e}^{\,t})$. On a alors $z'(t) = xy'(x)$ et $z''(t) = xy'(x) + xy''(x)$. Ainsi $y(x) = y(\mathrm{e}^{\,t}) = z(t)$ puis $y'(x) = \mathrm{e}^{-t}z'(t)$ et $y''(x) = \dfrac{z''(t) - z'(t)}{\mathrm{e}^{\,2t}}$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient $z'' - 4z = 4\,\mathrm{e}^{\,2t}$ et après résolution :
$$\mathcal{S}_z = \left\{t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\,2t} + B\,\mathrm{e}^{-2t} + t\,\mathrm{e}^{\,2t}\,;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$
Finalement, $\mathcal{S}_y = \left\{x \longmapsto Ax + \dfrac{B}{x} + x\ln(x)\,;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 21:

1. On suppose dans cette question que $b = 0$.
   (a) Lorsque $b = 0$, l'équation différentielle (V) devient
   $$N'(t) = aN(t).$$
   L'équation (V) est une équation différentielle homogène linéaire du premier ordre à coefficient constant. L'ensemble des solutions positives est
   $$\mathcal{S} = \{x \mapsto K\mathrm{e}^{\,at} | K \in \mathbb{R}_+^*\}.$$
   On impose de plus une condition initiale $N(0) = N_0$.
   La solution cherchée est la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad N(t) = N_0\mathrm{e}^{\,at}$
   (b) $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$. La population ne cesse de croitre et va tendre vers l'infini. Le modèle n'est pas satisfaisant car les ressources, la place, ... sont des quantités finies. Par conséquent, la population ne peut pas croitre infiniment.
2. Soit $b > 0$ et $K = \dfrac{a}{b}$. On suppose aussi qu'il existe une solution strictement positive N à l'équation (V). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose alors $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
   (a) La fonction N est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs strictement positive. La fonction $y = \dfrac{1}{N}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   Calculons la dérivée de y : $y' = -\dfrac{N'}{N^2}$.
   $$\begin{aligned} N \text{ est solution de } (V) \text{ donc } & N' = \big[a - bN\big]N \\ \text{donc } & -N' - bN^2 + aN = 0 \\ \text{donc } & -\frac{N'}{N^2} + a\frac{1}{N} = b, \quad \text{car N ne s'annule pas} \\ \text{donc } & y' + ay = b \qquad (\mathcal{E}) \end{aligned}$$

(b) On commence par résoudre $(\mathcal{E})$. L'équation $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle linéaire du première ordre à coefficient constant. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $\{x \mapsto C\mathrm{e}^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\}$. La fonction constante $x \mapsto \dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$. D'après le théorème fondamentale, les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(t) = \mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a} = C\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{K}.$$

D'après la question précédente, N est solution (V) donc $\dfrac{1}{N}$ est solution de $(\mathcal{E})$.
On en déduit que la taille de la population est nécessairement de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad N(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{1}{K}}.$$

En imposant la condition $N(0) = N_0$, on trouve $C = \dfrac{1}{N_0} - \dfrac{1}{K}$.
Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-at} + 1}$$

Vérifions que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N(t) > 0$. D'après l'énoncé $a > 0$, $b \geq 0$ et $K = \dfrac{a}{b}$, donc $K > 0$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+, N(t) \neq 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$, pour étudier le signe de $N(t)$ il suffit d'étudier le signe du dénominateur : $\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-at} + 1$.
Si $\dfrac{K}{N_0} - 1 \geq 0$, c'est à dire si $K \geq N_0$ (car $N_0 > 0$, le dénominateur est strictement supérieur à 1 car $e^{-at} > 0$.
Si $\dfrac{K}{N_0} - 1 \leq 0$, on a aussi $e^{-at} < 1$ car $t \in \mathbb{R}^+$ et car la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} > \frac{K}{N_0} - 1$$

donc :

$$\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1 > \frac{K}{N_0} > 0$$

Donc quelque soit N_0 strictement positif la solution trouvée est bien strictement positive.
Il reste à vérifier que la fonction N trouvée est bien solution de l'équation différentielle. La fonction $t \mapsto \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-at} + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annule pas (on vient de le prouver) donc N est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
N'(t) &= \frac{aK\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at}}{\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1\right)^2} \\
&= \frac{aK\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1\right) - aK}{\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1\right)^2} \\
&= a\frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1} - \frac{a}{K}\frac{K^2}{\left(\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-at} + 1\right)^2} \\
&= aN(t) - bN(t)^2 \\
&= (a - bN(t))N(t).
\end{aligned}$$

Donc la solution trouvée est bien solution de l'équation différentielle (V) et donc (V) admet bien des solutions. C'est même l'unique solution strictement positive de (V) sur $\mathbb{R}^+$.

(c) $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = K$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$ $(a>0)$. A l'on terme la population va se rapprocher de K. De plus, si $N_0 > K$ alors la fonction N est décroissante $(N' < 0)$ et la population diminue. La population, supérieur à K, est trop importante pour le milieux. Si $N_0 < K$ alors N est croissante $(N' > 0)$ la population augmente et tends vers K mais elle ne pourra pas dépasser K. Le nombre K est bien la capacité d'accueil du milieu.

Exercice 22: Soit $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E). On lui associe la fonction z définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $z(x) = x^2 y(x)$.

1. On sait que la fonction y est solution d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle est en particulier deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car elle l'est sur $\mathbb{R}$) donc, par produit, la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x)}$$

Comme y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, les fonctions $x \longmapsto 2x$, y et $x \longmapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit et par somme, la fonction z' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$z''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2 y''(x)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x)}$$

Comme z et z' sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\text{la fonction } z'' \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. Comme y est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^2 y''(x) + 4xy'(x) - (x^2 - 2)y(x) = 1$, c'est-à-dire

$$\underbrace{x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)}_{=z''(x)} - \underbrace{x^2 y(x)}_{=z(x)} = 1$$

soit $z''(x) - z(x) = 1$. Finalement,

$$\boxed{z \text{ est solution de l'équation différentielle } z'' - z = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation homogène est $(H) : z'' - z = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$, les racines (réelles) étant -1 et 1. On sait alors que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) dans $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}\,;\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus, une solution particulière de $(\mathcal{E})$ est la fonction constante $x \longmapsto -1$ donc, d'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ de $(\mathcal{E})$,

$$\boxed{\mathcal{S}_\mathcal{E} = \left\{ x \longmapsto -1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}\,;\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

4. Déterminons l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}_+^*$. On procède par double inclusion : nous allons montrer que

$$\mathcal{S}_E = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}}{x^2} \end{array} \right. ;\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   ⋆ Montrons que $\mathcal{S}_E \subset \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}}{x^2} \end{array} \right. ;\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Soit $y \in \mathcal{S}_E$. On a montré à la question 2. que la fonction $z : x \longmapsto x^2 y(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est solution de $(\mathcal{E})$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = x^2 y(x) = -1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}$$

c'est-à-dire

$$y(x) = \frac{-1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}}{x^2}$$

ce qui établit l'inclusion annoncée.

⋆ Réciproquement, nous devons montrer que si $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction y définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$y(x) = \frac{-1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}}{x^2}$$

est solution de l'équation différentielle (E). La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et en appelant z la fonction définissant le numérateur de y, on sait que $z'' - z = 1$ et donc, en reprenant les calculs établis à la question 1. (c'est-à-dire les expression de z'' et z' en fonction de y, y' et y''), on obtient bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) - (x^2 - 2)y(x) = 1$$

et donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci montre l'autre inclusion. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1 + A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{x}}{x^2} \end{array} \right. ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$