TD11 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr = 2 + \dfrac{3n}{2}$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et on sait que $u_1 = \sqrt{5}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_1 + (n-1)r = \sqrt{5} - 3(n-1) = 3 + \sqrt{5} - 3n$.
3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et de premier terme $v_0 = -7$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -7 \times (\frac{1}{10})^n$.
4. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{7}$ et de premier terme $b_0 = 6$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n = b_0 \times q^n = 6\left(\dfrac{3}{7}\right)^n$.
5. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et on sait que $u_2 = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 \times q^{n-2} = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.
6. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison (-1) et de premier terme $z_0 = -3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $z_n = -3 \times (-1)^n$.

Exercice 2:

1. $A = \sum\limits_{k=1}^{500} k = 125\ 250$ (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1)
2. $B = \sum\limits_{k=0}^{72} 6 + 2k = 5\ 694$ (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 6)
3. $C = \sum\limits_{k=0}^{399} 8 + 5k = 402\ 200$ (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 8)
4. $D = \sum\limits_{k=0}^{10} 5 \times 2^k = 10\ 235$ (somme des consécutifs termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5)
5. $E = \sum\limits_{k=0}^{6} 2^2(2^3)^k = 1\ 198\ 372$ (somme des consécutifs termes d'une suite géométrique de raison 2^3 et de premier terme 2^2)
6. $F = \begin{cases} n & \text{si } x = 1 \\ x \times \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x et de premier terme x)

Exercice 3:

Ce sont des suites arithmético-géométriques, on applique la méthode vue en cours.

1. Trouvons $L \in R$ tel que $L = \frac{1}{2}L + 1$. On obtient $L = 2$.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - L$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n + 1 \\ L & = & \frac{1}{2}L + 1 \end{cases}$
   Par soustraction membre à membre on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.
   Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = -2$.
   On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2 \times (\frac{1}{2})^n$
   Puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + (-2) \times (\frac{1}{2})^n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{5}{2}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times (-2)^n$

Exercice 4:

Il s'agit de suite récurrentes linéaires d'ordre 2. On étudie donc l'équation caractéristique pour trouver la forme du terme général puis on utilise les premiers termes pour calculer les constantes.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$.
   On a une solution double donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + Bn) \times 1^n = A + Bn$
   Or $\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ A + B & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & -2 \end{array} \right.$
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - 2n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{8 \times (-4)^n + 6 \times 3^n}{7}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^{n+1} + 5^{n-1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2n - 3$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\frac{-5}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}}) \times (\sqrt{2})^n + (\frac{-5}{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}) \times (-\sqrt{2})^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2} \sin(\frac{n\pi}{4})$
7. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \cos(\frac{n\pi}{3})$
8. $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = (\sqrt{3} \cos(\frac{n\pi}{6}) - \frac{5}{2} \sin(\frac{n\pi}{6})) \times 2^n$

Exercice 5:

1. Notons u_n la quantité de carbone 14 restante après n années.
   u_0 est donc la quantité de carbone 14 initiale au moment du décès.
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0,000121 u_n = 0,999879 u_n$
   (u_n) est donc une suite géométrique de raison $0,999879$ et de premier terme u_0.
   On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times (0,999879)^n$.
   Si un os contient une quantité $\frac{u_0}{2}$ de carbone 14, déterminons son âge approximatif en résolvant l'équation :
   $u_n = \frac{u_0}{2} \Leftrightarrow (0,999879)^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln(0,999879) = \ln(0,5)$ (stricte croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$)
   On obtient $n = \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,999879)} \approx 5728$ ans (appelé demi vie du carbone 14).
2. Notons p_n la proportion de lapins blancs à la $n$ième générations.
   On a $p_0 = \frac{1}{4}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = (1 - \alpha) p_n + \beta(1 - p_n)$ (proportion de lapins d'allèle A qui ne mutent pas + proportion de lapins d'allèle a qui mutent).
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = (1 - \alpha - \beta) p_n + \beta = (1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}) p_n + \frac{1}{10} = \frac{7}{10} p_n + \frac{1}{10}$
   On reconnaît une suite arithmético géométrique dont on détermine le terme général.
   On obtient $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \times (\frac{7}{10})^n$
   Comme $|\frac{7}{10}| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \frac{1}{3}$.
   A long terme, on devrait donc observer environ un tiers de lapins blancs.
3. Notons u_n le prix du $n$ième mètre creusé. On a $u_1 = 20$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,1 u_n$.
   (u_n) est une suite géométrique de raison $1,1$ de premier terme $u_1 = 20$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 20 \times (1,1)^{n-1}$
   Le prix d'un forage de 80 m correspond à $\sum\limits_{k=1}^{80} u_k$.
   Or $\sum\limits_{k=1}^{80} u_k = \sum\limits_{k=1}^{80} 20 \times (1,1)^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{79} 20 \times (1,1)^k = 20 \times \dfrac{1 - (1,1)^{80}}{1 - 1,1} \approx 409\ 480,04$€.
4. Au début, rien n'est hachuré donc $u_0 = 0$. À chaque étape, on colorie $(1/9)^{\text{ème}}$ de la partie qui n'a pas été hachuré à l'étape d'avant. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'aire hachurée à l'étape $n+1$ est

celle correspondant à l'étape n (soit u_n) plus $(1/9)^{\text{ème}}$ de l'aire non encore hachurée à l'étape n (soit $\dfrac{1-u_n}{9}$). On en déduit donc que

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1-u_n}{9} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}u_n$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
On détermine la constante L telle que $L = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}L$ soit $L = 1$
On montre que la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{8}{9}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n - 1 = (u_0 - 1) \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ et donc

$$u_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Comme $\dfrac{8}{9} \in]-1,1[$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 1.

Je me perfectionne !

Exercice 6:

1. Rappelons que si $\beta > 0$, la fonction puissance $x \longmapsto x^\beta$ est définie par $x^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln x}$ et donc le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$. Il faut donc vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ pour que la suite soit bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition : « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
   - ⋆ **Initialisation :** montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie. On sait que $u_0 > 0$ donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On sait que u_n est bien défini et est strictement positif donc $(u_n)^\beta$ est bien défini, c'est-à-dire u_{n+1} est bien défini et
   $$u_{n+1} = (u_n)^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln(u_n)} > 0$$
   car la fonction exp est à valeurs strictement positives. Donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\alpha > 0$ et $u_n > 0$, on a $\boxed{\ln(u_{n+1}) = \ln\alpha + \beta\ln(u_n)}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \ln u_n$. On sait d'après la question 2. que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On détermine L tel que $L = \ln(\alpha) + \beta L$ soit $L = \frac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$
   On montre que la suite $(a_n - \frac{\ln(\alpha)}{1-\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison β.
   On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$a_n - \frac{\ln\alpha}{1-\beta} = \left(\ln(u_0) - \frac{\ln\alpha}{1-\beta}\right)\beta^n$$
   c'est-à-dire
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln u_n = \frac{\ln\alpha}{1-\beta} + \left(\ln(u_0) - \frac{\ln\alpha}{1-\beta}\right)\beta^n}$$
4. En utilisant la question 3., on obtient
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left[\frac{\ln\alpha}{1-\beta} + \left(\ln(u_0) - \frac{\ln\alpha}{1-\beta}\right)\beta^n\right]}$$

Exercice 7:

Par récurrence (on ne le rédige pas, à vous de le faire) on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n^2 \geq 0$ et $u_{n+1}^2 \geq 0$ donc $u_n^2 + u_{n+1}^2 \geq 0$ et comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, u_{n+2} est bien défini, ce qui justifie que la suite est bien définie. De plus, comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $u_{n+2} \geq 0$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n^2} \iff u_{n+2}^2 = u_{n+1}^2 + u_n^2$$

Ainsi, en posant $v_n = u_n^2$ pour tout entier naturel n, on est ramené à trouver le terme général de cette nouvelle suite où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = z_{n+1} + z_n$$

avec $v_0 = u_0^2 = 1$ et $v_1 = u_1^2 = 4$. Il s'agit d'une suite récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique associée $t^2 - t - 1 = 0$. Le discriminant vaut $5 > 0$ donc cette équation admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On détermine ensuite A et B tel que $v_0 = 1$ et $v_1 = 4$. Or $v_0 = A + B$ et

$$v_1 = A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Donc

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ (A+B) + (A-B)\sqrt{5} = 8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \dfrac{7}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2\sqrt{5}} \\ B = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}}$$

car on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

Exercice 8:

1. (u_n) doit vérifier la relation de récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + n + 3$
   soit $\forall n \in \mathbb{N}, a(n+2) + b = a(n+1) + b + 2(an+b) + n + 3 \Leftrightarrow (2a+1)n + 2b - a + 3 = 0$
   On en déduit par identification :
   $2a + 1 = 0$
   et $2b - a + 3 = 0$
   soit $a = \frac{-1}{2}$ et $b = -\frac{7}{4}$
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-1}{2}n - \frac{7}{4}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = x_{n+2} - u_{n+2}$
   $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (x_{n+1} + 2x_n + n + 3) - (u_{n+1} + 2u_n + n + 3)$
   $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n$.
   On a par ailleurs $w_0 = x_0 - u_0 = \frac{11}{4}$ et $w_1 = x_1 - u_1 = \frac{13}{4}$

3. (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   On cherche son terme général en fonction de n et on obtient :
   $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{3}{4} \times (-1)^n + 2 \times 2^n$
   On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = w_n + u_n = \frac{3}{4} \times (-1)^n + 2 \times 2^n - \frac{1}{2}n - \frac{7}{4}$.

Exercice 9:

1. (v_n) doit vérifier la relation de récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n + 2^n$
   soit $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha r^{n+2} = 2\alpha r^{n+1} + 3\alpha r^n + 2^n$
   En particulier pour $n = 0$, on doit avoir :$\alpha r^2 = 2\alpha r + 3\alpha + 1$
   d'où $\alpha(r^2 - 2r - 3) = 1$
   Reprenons alors la formule de récurrence générale : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha r^{n+2} = 2\alpha r^{n+1} + 3\alpha r^n + 2^n$
   On peut aussi l'écrire en factorisant pas αr^n :
   $\alpha(r^2 - 2r - 3)r^n = 2^n$
   Mais on sait que $\alpha(r^2 - 2r - 3) = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, r^n = 2^n$ ce qui permet d'en déduire $r = 2$.
   Puis comme $\alpha(r^2 - 2r - 3) = 1$, on obtient $\alpha = \frac{-1}{3}$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1}{3} \times 2^n$.
2. On a $y_0 = \frac{4}{3}$ et $y_1 = \frac{5}{3}$
   et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = z_{n+2} - v_{n+2} = (2z_{n+1} + 3z_n + 2^n) - (2v_{n+1} + 3v_n + 2^n)$
   $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n$
   (y_n) est une suite récurrrente linéaire d'ordre 2.
3. On obtient son terme général en fonction de n :
   $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{7}{12} \times (-1)^n + \frac{3}{4} \times 3^n$
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = y_n + v_n = \frac{7}{12} \times (-1)^n + \frac{3}{4} \times 3^n - \frac{1}{3} \times 2^n$

Exercice 10:

1. Si $a = -3$, une récurrence permet de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3$ donc la suite (u_n) est constante. On peut aussi utiliser que si $a = -3$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 0, elle est donc constante.
2. De nouveau une récurrence permet de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
3. (a) La suite (v_n) est bien définie si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -3$, ce qui est bien le cas d'après la question précédente.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{1}{5}\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5}v_n$.

   Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ de premier terme $v_0 = \dfrac{a-1}{a+3}$.

   On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times (\frac{1}{5})^n$.

   (c) D'après la question précédente,

   $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = v_0 \times (\frac{1}{5})^n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3v_0(\frac{1}{5})^n + 1}{1 - v_0(\frac{1}{5})^n}$

Exercice 11:

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n > 0$ ». Montrons que pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie à l'aide d'un raisonnement par récurrence à deux pas.
   - ⋆ **Initialisation :** on sait par hypothèse que $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ donc les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

- ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie. On sait que

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n}$$

donc u_{n+2} est le quotient de deux nombres strictement positifs par hypothèse de récurrence donc $u_{n+2} > 0$ et donc la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

- ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence à deux pas.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n} &\iff u_{n+2}(u_{n+1} + u_n) = 2u_{n+1}u_n \\ &\iff \frac{u_{n+2}(u_{n+1} + u_n)}{u_n u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_n u_{n+1} u_{n+2}} \\ &\iff \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{u_{n+2}} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $z_n = \dfrac{1}{u_n}$, on obtient

$$2z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$$

Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux dont l'équation caractéristique associée est $2r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant vaut $1 > 0$ donc l'équation a deux racines réelles distinctes qui sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{z_n} = \frac{1}{A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 12:

1. On peut utiliser une fonction récursive ou une boucle `for`. Avec une fonction récursive, cela donne :

```
from math import *
def suite(n) :
     if (n==0) :
          return 1
     else :
          return suite(n-1)/sqrt(4-suite(n-1)**2)
```

Avec une boucle `for`, cela s'écrit :

```
from math import *
def suite(n) :
     u=1
     for k in range(n) :
          u=u/sqrt(4-u**2)
     return u
```

2. On a $\boxed{v_0 = u_0^2 = 1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En élevant au carré la relation de récurrence vérifiée par notre suite, il vient $u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2}{4 - u_n^2}$, c'est-à-dire $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4 - v_n}}$

3. (a) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n$ et donc en particulier $u_n \neq 0$. Par conséquent, $v_n = u_n^2 \neq 0$. Cherchons maintenant la relation de récurrence vérifiée par la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4 - v_n}$, on a, en passant à l'inverse :

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{4 - v_n}{v_n} = \frac{4}{v_n} - 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{z_{n+1} = 4z_n - 1}$$

   (b) On a $z_0 = \dfrac{1}{v_0} = 1$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = 4\ell - 1 \iff 3\ell = 1 \iff \ell = \frac{1}{3}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $t_n = z_n - \ell = z_n - \dfrac{1}{3}$. On a $z_{n+1} = 4z_n - 1$ et $\ell = 4\ell - 1$. En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient $z_{n+1} - \ell = 4z_n - 1 - (4\ell - 1)$, c'est-à-dire $t_{n+1} = 4t_n$. On en déduit que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $t_0 = z_0 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ et de raison 4. On trouve donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 4^n}$$

4. Déterminons l'expression de u_n en fonction de n. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $z_n = \dfrac{1}{v_n}$ et que $z_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 4^n$. Donc

$$\boxed{v_n = \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 4^n} = \frac{3}{1 + 2 \times 4^n}}$$

   Ensuite, on a $v_n = u_n^2$ donc $u_n = \pm\sqrt{v_n}$. Or on sait que $u_n > 0$ donc on a nécessairement $u_n = +\sqrt{v_n}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 2 \times 4^n}}}$$

Exercice 13:

1. Calculons x_0 et x_1. On a $\boxed{x_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1}$ et $\boxed{x_1 = u_2 - u_1 = -1 - 1 = -2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$ donc $u_{n+3} - u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Or $x_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+2}$ et $x_n = u_{n+1} - u_n$. On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+2} = x_n}$$

3. Déterminons l'expression de x_n en fonction de n. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux (à coefficients constants). L'équation caractéristique associée est $r^2 = 1$. Ses racines sont 1 et -1. On sait alors qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier naturel n, on ait

$$x_n = A \times 1^n + B(-1)^n = A + B(-1)^n$$

   On détermine les valeurs de A et B en utilisant les conditions initiales : $x_0 = 1$ et $x_1 = -2$. On résout :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 & \mathrm{L}_1 \\ A - B = -2 & \mathrm{L}_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A + B = 1 & \mathrm{L}_1 \\ 2B = 3 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \end{cases}$$
$$\iff (A, B) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

   Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{-1 + 3(-1)^n}{2}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $x_k = u_{k+1} - u_k$. En utilisant la linéarité de la somme, le changement d'indice $\ell = k+1$ et la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n - \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) \\ &= u_n\end{aligned}$$

car $u_0 = 0$. Finalement, on a $\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k}$.

(b) On utilise une boucle `for` :

```
def somme(n) :
    S=0
    for k in range(n) :
        S=S+(-1+3*(-1)**k)/2
    return S
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons l'expression de u_n en fonction de n. D'après la question 3., on sait que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $x_k = \dfrac{-1+3(-1)^k}{2}$. En utilisant maintenant la question 4. (a), il vient

$$\begin{aligned}u_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1+3(-1)^k}{2} & \\ = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k & \qquad \text{(par linéarité de la somme)} \\ = -\frac{n}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} & \qquad \text{(somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison } -1 \neq 1) \\ = -\frac{n}{2} + \frac{3}{4}\big(1-(-1)^n\big) &\end{aligned}$$

Remarquons que cette relation est valable pour $n = 0$. On en conclut donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n}{2} + \frac{3}{4}\big(1+(-1)^{n+1}\big)}$$