TD12 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. $c([0;2]) = [0,4]$
   $c([-1;0]) = [0,1]$
   $c([-2;2]) = [0,4]$
   $c([-1;3]) = [0,9]$
   Si $a < b \leq 0$ alors $c([a,b]) = [b^2, a^2]$
   Si $0 \leq a < b$ alors $c([a,b]) = [a^2, b^2]$
   Si $a \leq 0 \leq b$ alors $c([a,b]) = [0, \max(a^2, b^2)]$
2. Dans chacun des cas suivants, réaliser le tableau de variations de la fonction étudiée puis déterminer les images des ensembles demandés. On utilise à chaque fois la continuité de la fonction étudiée et le théorème des valeurs intermédiaires.
   $f([0;1]) = [1,2]$, $f([0;2]) = [1,2]$, $f([0;3]) = [1,5]$.
3. $g([-1;1]) = [-2,2]$, $g([0;2]) = [-2,2]$, $g([1;3]) = [-2,2]$.
4. $h(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 2:

- La fonction sin est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et est continue sur cette intervalle (car elle est continue sur $\mathbb{R}$). Or $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin(x)\,;\, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$
- La fonction tan est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et est continue sur cette intervalle. Or $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left\{\tan(x)\,;\, -\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\right\} = [-1, +\infty[$
- La fonction cos est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ et est continue sur cette intervalle (car elle est continue sur $\mathbb{R}$). Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = \left\{\cos(x)\,;\, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Exercice 3:

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective on montre que :

$$\forall a, b \in E, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

On peut aussi se servir de la stricte monotonie de la fonction si la fonction est définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective, on trouve : a et b distincts dans E tels que $f(a) = f(b)$.

1. f : $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
   f n'est pas injective car on a $f(1) = f(-1)$
2. g : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
   <u>Méthode 1 :</u> La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc elle est injective (puisque $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+$, $g(a) = g(b) \Leftrightarrow a = b$, théorème vu au chapitre 4).
   <u>Méthode 2 :</u> Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $g(a) = g(b)$,
   Or

$$\begin{aligned} g(a)=g(b) &\Leftrightarrow a^2=b^2\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2=0\\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=0\\ &\Leftrightarrow a=b \text{ ou } a=-b \text{ (impossible car } a \text{ et } b \text{ sont tous les deux positifs)}\end{aligned}$$

Ainsi $\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^2, g(a)=g(b)\Rightarrow a=b$ donc g est injective.

3. h :$\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 2x-3\end{cases}$

   Méthode 1 : La fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient directeur égal à 2) donc elle est injective (puisque $\forall (a,b)\in\mathbb{R}$, $h(a)=h(b)\Leftrightarrow a=b$, théorème vu au chapitre 4).

   Méthode 2 : Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $h(a)=h(b)$,

   Or

   $$\begin{aligned} h(a)=h(b) &\Leftrightarrow 2a-3=2b-3\\ &\Leftrightarrow 2a=2b\\ &\Leftrightarrow a=b\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, h(a)=h(b)\Rightarrow a=b$ donc h est injective.

4. j :$\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto |x|\end{cases}$

   j n'est pas injective car $j(4)=j(-4)$.

5. k :$\begin{cases} \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \ln(x^2)-\ln(3x)\end{cases}$

   Soient $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $k(a)=k(b)$,

   Or

   $$\begin{aligned} k(a)=k(b) &\Leftrightarrow \ln(a^2)-\ln(3a)=\ln(b^2)-\ln(3b)\\ &\Leftrightarrow \ln(\tfrac{a}{3})=\ln(\tfrac{b}{3})\\ &\Leftrightarrow \tfrac{a}{3}=\tfrac{b}{3}\\ &\qquad \text{car l'exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow a=b\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, k(a)=k(b)\Rightarrow a=b$ donc k est injective.

6. l :$\begin{cases} [0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1]\\ x\mapsto \sqrt{\sin(x)}\end{cases}$

   Soient $(a,b)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2$ tels que $l(a)=l(b)$,

   Or

   $$\begin{aligned} l(a)=l(b) &\Leftrightarrow \sqrt{\sin(a)}=\sqrt{\sin(b)}\\ &\Leftrightarrow \sin(a)=\sin(b)\\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\\ &\qquad \text{avec } \sqrt{\sin(a)}\in\mathbb{R}_+ \text{ et } \sqrt{\sin(b)}\in\mathbb{R}_+\\ &\Leftrightarrow a\equiv b[2\pi] \text{ ou } a\equiv \pi-b[2\pi]\\ &\Rightarrow a=b \text{ car } (a,b)\in[0,\tfrac{\pi}{2}]^2\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall (a,b)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2, l(a)=l(b)\Rightarrow a=b$ donc l est injective.

7. m :$\begin{cases} [0,\pi]\to[0,1]\\ x\mapsto |\cos(x)|\end{cases}$

   m n'est pas injective car $l(\frac{\pi}{6})=l(\frac{5\pi}{6})$

8. n :$\begin{cases} \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\\ x\mapsto 2x\end{cases}$

   Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $n(a)=n(b)$,

   Or

   $$\begin{aligned} n(a)=n(b) &\Leftrightarrow 2a=2b\\ &\Leftrightarrow a=b\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2, n(a)=n(b)\Rightarrow a=b$ donc n est injective.

9. p :$\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{Z}\\ x\mapsto \lfloor x\rfloor\end{cases}$

   p n'est pas injective car $p(1)=p(1,2)$.

Exercice 4:

Pour montrer que $f : E \to F$ est surjective, on prend $y \in F$ et on résout l'équation $f(x) = y$.
Si cette équation admet au moins une solution dans E, alors f est surjective.
On peut aussi, si la fonction est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, dresser le tableau de variation, déterminer $f(E)$ et vérifier que $f(E) = F$.

Pour montrer que f nest pas surjective, il suffit de trouver un élement de F qui n'a pas d'antécédent dans E.

1. f :$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

   f n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$.

2. g :$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 5 \end{cases}$

   Ici résoudre l'équation $g(x) = y$ n'est pas possible. Mais on doit seulement prouver (si g est surjective) que cette équation admet pour tout $y \in \mathbb{R}$ au moins une solution. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (en factorisant par x^3). Or g est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires donne $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc chaque élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par g. Donc g est surjective.
   On aurait aussi pu dresser le tableau de variation qui nous permettra de dire aussi si la fonction est injective. La fonction g est un polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x + 1)(x + 3)$$

   La dérivée est un polynôme du second degré dont les deux racines sont -1 et -3 et dont le coefficient devant x^2 est égal à $3 > 0$. Donc :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Notons que le tableau de variation nous permet donc de dire que g est (bien) surjective mais n'est par contre pas injective puisque tous les réels appartenant $[1, 5]$ ont au moins 3 antécédents, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (et en fait exactement 3 mais pour le prouver il faut faire appel au théorème de la bijection sur chacun des intervalles, la rédaction serait plus longue).

3. h :$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 3 \end{cases}$

   Soit $y \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} h(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 3 = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{y+3}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   (on vérifie qu'au moins une solution est dans l'ensemble de départ)

   Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, h(x) = y$ donc h est surjective. On a même prouvé ici que x était unique et donc prouvé que h était bijective, sa fonction réciproque étant $y \mapsto \frac{y+3}{2}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. j :$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x| \end{cases}$

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$.

   $$\begin{aligned} j(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad |x| = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \in \mathbb{R} \text{ ou } x = -y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   (on vérifie qu'au moins une solution est dans l'ensemble de départ)

   Ainsi $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, j(x) = y$ donc j est surjective.
   On aurait pu remarquer directement que si $y \in \mathbb{R}^+$ alors $y \in \mathbb{R}$ et $|y| = y$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $j(x) = y$ (avec $x = y$ notamment).

5. k : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{e^x}\end{array}\right.$
   k n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par k dans $\mathbb{R}$.
6. l : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x\end{array}\right.$
   l n'est pas surjective car 3 n'a pas d'antécédent par l dans $\mathbb{Z}$.
7. m : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor\end{array}\right.$
   Soit $y \in \mathbb{Z}$.
   $$\begin{array}{rcl} m(x) = y & \Leftrightarrow & \lfloor x \rfloor = y \\ & \Leftrightarrow & x \in [y, y+1[\subset \mathbb{R} \end{array}$$
   (on vérifie qu'au moins une solution est dans l'ensemble de départ)
   Ainsi $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}$ (il y en a en fait une infinité) tel que $m(x) = y$ donc m est surjective.
   Là encore on aurait pu remarquer que : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et que pour $y \in \mathbb{Z}$, $\lfloor y \rfloor = y$. Donc que tout $y \in \mathbb{Z}$ admet au moins un antécédent par m.
8. p : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to [-2, 2] \\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x)\end{array}\right.$
   Soit $y \in [-2, 2]$. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = y$
   Transformons l'expression $\cos(x) + \sin(x)$ en $r\cos(x + \beta)$.
   Posons $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
   D'où $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x)$
   $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\sin(x)) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$
   Finalement $\cos(x) + \sin(x) = y \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$
   or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ tandis qu'un cosinus est compris entre -1 et 1.
   Ainsi par exemple $y = 2$ n'aura pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$ par p.
   p n'est donc pas surjective.

Exercice 5:

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 3x^2$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

   Ainsi $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$
3. En utilisant le théorème de la bijection sur R_-^* et sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut montrer par exemple que 0 admet deux antécédents par f dans $\mathbb{R}^*$ (l'un dans R_-^*, l'autre dans $\mathbb{R}_+^*$) donc f n'est pas injective.
4. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$.
   g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi $g(\mathcal{D}_g) =]-\infty, -1]$.

En utilisant deux fois le théorème de la bijection sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, on peut montrer par exemple que -2 admet deux antécédents par g sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g n'est pas injective.

Exercice 6:

1. f :$\begin{cases} [0;+\infty[\to[-5,+\infty[\\ x \mapsto x^2-5 \end{cases}$

   1ère méthode

   f est continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[-5,+\infty[$ donc elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $[-5,+\infty[$.

   2ème méthode : plus adaptée ici car donne directement la réciproque

   Soit $y \in [-5,+\infty[$.

   $$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow x^2-5=y \\ &\Leftrightarrow x^2=y+5\geq 0 \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y+5}\in\mathbb{R}_+ \text{ ou } x=-\sqrt{y+5}\notin\mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

   Ainsi $\forall y \in [-5,+\infty[, \exists! x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x)=y$ donc f est bijective.

   Elle admet donc pour application réciproque $f^{-1} : \begin{cases} [-5,+\infty[\to\mathbb{R}_+ \\ y\mapsto\sqrt{y+5} \end{cases}$

   3ème méthode, plus difficile

   On peut remarquer que $f = g\circ h$ avec $g : \begin{cases} [0,+\infty[\to[-5,+\infty[\\ x\mapsto x-5 \end{cases}$ et $h : \begin{cases} [0,+\infty[\to[0,+\infty[\\ x\mapsto x^2 \end{cases}$ qui sont toutes les deux bijectives, de réciproque : $g^{-1} : \begin{cases} [-5,+\infty[\to[0,+\infty[\\ x\mapsto x+5 \end{cases}$ et $h^{-1} : \begin{cases} [0,+\infty[\to[0,+\infty[\\ x\mapsto\sqrt{x} \end{cases}$.

   Par composition f est bijective et pour tout $y\in[-5,+\infty[$,

   $$f^{-1}(y)=h^{-1}(g^{-1}(y))=\sqrt{y+5}$$

2. g :$\begin{cases} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sin(x)+2x \end{cases}$

   Faire une étude des variations de g et montrer que g est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   La résolution d'équation ici n'est pas possible. On ne peut pas exprimer la fonction réciproque même si elle existe.

3. h :$\begin{cases}]6,+\infty[\to\mathbb{R}_+^* \\ x\mapsto\frac{1}{x-6} \end{cases}$

   1ère méthode Faire une étude des variations de h et montrer que h est continue et strictement décroissante de $]6,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc bijective de $]6,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

   2ème méthode : plus adaptée car donne la réciproque

   Soit $y\in\mathbb{R}_+^*$.

   $$\begin{aligned} h(x)=y &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x-6}=y \\ &\Leftrightarrow x-6=\tfrac{1}{y} \\ &\quad\text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\quad\text{avec } \tfrac{1}{x-6}\in\mathbb{R}_+^* \text{ et } y\in\mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x=6+\tfrac{1}{y}\in]6,+\infty[\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall y\in\mathbb{R}_+^*, \exists! x\in]6,+\infty[$ tel que $h(x)=y$ donc h est bijective.

   Elle admet donc pour application réciproque $h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^*\to]6,+\infty[\\ y\mapsto 6+\frac{1}{y} \end{cases}$

   3ème méthode, plus difficile

   On peut remarquer que $h=h_1\circ h_2$ avec $h_2 : \begin{cases}]6,+\infty[\to]0,+\infty[\\ x\mapsto x-6 \end{cases}$ et $h_1 : \begin{cases}]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ x\mapsto\dfrac{1}{x} \end{cases}$ qui sont toutes les deux bijectives, de réciproque : $h_2^{-1} : \begin{cases}]0,+\infty[\to[6,+\infty[\\ x\mapsto x+6 \end{cases}$ et $h_1^{-1} : \begin{cases}]0,+\infty[\to]0,+\infty[\\ x\mapsto\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Par composition f est bijective et pour tout $y \in]0,+\infty[$,

$$h^{-1}(y) = h_2^{-1}(h_1^{-1}(y)) = \frac{1}{y} + 6$$

Exercice 7:

On considère l'application f : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to]-1;1] \\ x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$

Soit $y \in]-1,1]$. Résolvons sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Leftrightarrow & \frac{1-x^2}{1+x^2} = y \\ & \Leftrightarrow & x^2 = \frac{1-y}{y+1} \text{ car } y \neq -1 \\ & \Leftrightarrow & x = \sqrt{\frac{1-y}{y+1}} \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1-y}{y+1}} \notin \mathbb{R}_+ \\ & & \text{car } \frac{1-y}{y+1} \geq 0 \end{array}$$

Ainsi $\forall y \in]-1,1], \exists! x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$ donc f est bijective.

Elle admet donc pour application réciproque : $f^{-1} : \begin{cases}]-1,1] \to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto \sqrt{\frac{1-y}{y+1}} \end{cases}$

Exercice 8:

Soit f l'application définie par $x \mapsto \frac{1-x}{x+2}$

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. f est dérivable sur son domaine de définition de dérivée $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$.
   Après étude des limites, on en déduit que f est strictement décroissante de $]-\infty,-2[$ sur $]-\infty,-1[$ et strictement décroissante de $]-2,+\infty[$ dans $]-1,+\infty[$. La fonction f étant continue sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. Soit $(a,b) \in (\mathcal{D}_f)^2$ tels que $f(a) = f(b)$
   Or
   $$\begin{array}{rcl} f(a) = f(b) & \Leftrightarrow & \frac{1-a}{a+2} = \frac{1-b}{b+2} \\ & \Leftrightarrow & (1-a)(b+2) = (1-b)(a+2) \\ & \Leftrightarrow & 3a = 3b \\ & \Leftrightarrow & a = b \end{array}$$
   Ainsi $\forall (a,b) \in (\mathcal{D}_f)^2, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ donc f est injective.
4. L'ensemble d'arrivée de f étant $f(\mathcal{D}_f)$ la fonction est surjective par définition de $f(\mathcal{D}_f)$.
5. f est injective et surjective donc bijective et admet donc une réciproque que l'on calcule :
   Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Résolvons sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ l'équation $f(x) = y$.
   $$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Leftrightarrow & \frac{1-x}{x+2} = y \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{1-2y}{y+1} \text{ car } y \neq -1 \end{array}$$
   Par ailleurs cette solution est bien différente de -2 car $\frac{1-2y}{y+1} = -2 \Leftrightarrow 1 = -2$ IMPOSSIBLE !
   Ainsi $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \exists! x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que $f(x) = y$ donc f est surjective.
   Donc :
   $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ y \mapsto \frac{1-2y}{y+1} \end{cases}$

Exercice 9:

Commençons par remarquer que $B = \{-3, 1, \sqrt{2}\}$.

1. $\mathbb{1}_A : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$

   $\mathbb{1}_B : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{-3, 1, \sqrt{2}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

2. $\mathbb{1}_A(4) = 1, \mathbb{1}_A(\pi) = 0, \mathbb{1}_A(-5) = 1$.
3. $\mathbb{1}_B(0) = 0$, $\mathbb{1}_B(1) = 1$, $\mathbb{1}_B(-3) = 1$, $\mathbb{1}_B(\sqrt{2}) = 1$, $\mathbb{1}_B(-\sqrt{2}) = 0$.
4. $\mathbb{1}_{A\cap B}(1) = 1$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(\sqrt{2}) = 0$,$\mathbb{1}_{A\cup B}(\sqrt{2}) = 1$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(1) = 0$.
5. Les antécédents de 0 par $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ sont les éléments de $\mathbb{Z}$.

Je me perfectionne !

Exercice 10:

1. $f(1+i) = f(1-2i)$ donc f n'est pas injective.
   Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation $f(x) = y$.
   $$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow Re(x) = y \\ &\Leftrightarrow x \in \{y + it, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$
   Ainsi $\forall y \in R, \exists x \in \mathbb{C}$ (il y en a une infinité !) tel que $f(x) = y$ donc f est surjective.
   Pour la surjectivité on aurait aussi pu remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{C}$ et $Re(y) = y$. Donc un antécédent de y par f est y. Donc tout réel admet un antécédent par f donc f est surjective.
2. On peut montrer directement que g est bijective.
   Méthode 1
   Soit $y \in \mathbb{C}$. Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation $g(x) = y$.
   $$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \bar{x} = y \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = \alpha + i\beta \text{ en notant } y = \alpha + i\beta \\ &\Leftrightarrow x = \overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$
   Ainsi $\forall y \in \mathbb{C}, \exists! x \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = y$ donc g est bijective.
   Méthode 2
   On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\bar{z})} = z$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $(g \circ g)(z) = z$. Donc $g \circ g = Id_{\mathbb{C}}$. Ce qui signifie que g admet une fonction réciproque (ici c'est un cas particulier $g^{-1} = g$) et donc que g est bijective.
3. Cette fonction n'est pas injective puisque $h(1,0) = h(-1,0)$. D'autre part elle n'est pas surjective puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + 2y^2 \geq 0$ (-1 n'a donc pas d'antécédent par h).
4. Cette fonction n'est pas injective puisque $h(1,0) = h(-1,0)$.
   Soit $w \in \mathbb{R}^+$. Alors $h_1(\sqrt{w}, 0) = (\sqrt{w})^2 + 2 \times 0^2 = w$. Donc pour tout $w \in \mathbb{R}^+$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h_1(x,y) = w$. Donc h_1 est surjective.
5. k n'est pas injective car $k(x^2) = k(x^2 + 1)$.
   Soit $Q \in E$, résolvons sur E, $k(P) = Q$ qui est équivalent à $P' = Q$.
   Comme Q est un polynôme, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Il faut prouver que ces primitives sont des polynômes. Comme Q est un polynôme il existe $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients réels a_0, a_1, a_2 ... a_{n-1} et a_n tel que $a_n \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$
   Il s'agit donc de trouver un polynôme qui, une fois dérivé, est égal à Q. Or Q est la somme de fonctions dont on connaît des primitives. On peut donc prendre P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$P(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$
   Ainsi P est une primitive de Q sur $\mathbb{R}$ et c'est un polynôme à coefficients réels.
   Donc k est surjective.
6. Montrons que l est injective :
   Soient $P, Q \in F$ tels que $l(P) = l(Q)$ alors $P' = Q'$. Donc $P' - Q' = 0$, donc $(P - Q)' = 0$. Et $P - Q$ est un polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle. C'est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$ (qui est bien un intervalle). Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$P - Q = c$$
   P et Q sont donc égaux à une constante près.

Mais $P(0) = Q(0) = 1$ d'où $c = 0$.
On en déduit que $P = Q$ donc k est injective.
Montrons que l est surjective.
Soit $R \in E$, résolvons $l(P) = R$ qui est équivalent $P' = R$.
P est donc une primitive de R. Cette question est proche de la question précédente mais il faut cette fois-ci choisir notre primitive P telle que $P(0) = 1$. Comme R est un polynôme il existe $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients réels a_0, a_1, a_2 ... a_{n-1} et a_n tel que $a_n \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

On a vu dans la question précédemment qu'une primitive de R sur $\mathbb{R}$ est (cette fois-ci on l'appelle S) :

$$S(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Remarquons que $S(0) = 0$ Il suffit donc de prendre $P = S + 1$ qui est bien un polynôme tel que $P(0) = 1$ et qui est bien une primitive de R. P est donc bien l'antécédent de R (l'unique puisque l'application est injective)
Ainsi $\forall R \in E, R$ admet un antécédent dans F par l donc l est surjective.
Finalement l est bijective.

Exercice 11:

Soit f : $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$

En dressant le tableau de variation de f on montre que f est continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ donc f est bijective.

Pour déterminer sa réciproque, on prend $y \in [1, +\infty[$ et on résout $f(x) = y$.
$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 2ye^x + 1}{e^x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ car $e^x > 0$.
Posons $X = e^x$ et résolvons $X^2 - 2yX + 1 = 0$
Le discriminant vaut $\Delta = 4(y^2 - 1)$.
Remarque : si $y = 1$ alors on a 0 comme antécédent. On étudie dans la suite le cas où $y > 1$, c'est à dire un discriminant strictement positif.
On obtient deux solutions :
$X = y - \sqrt{y^2 - 1}$ ou $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$
Ces deux solutions étant positives, on obtient :
$x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ ou $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$
Or $y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$ (quantité conjuguée)
mais $y > 1$ donc $\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1$ soit $\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) < 0$
La seule solution dans $\mathbb{R}_+$ est donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
Ainsi f^{-1} : $\begin{cases} [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{cases}$

Exercice 12:

1. On suppose $A \subset B$.
   Soit $y \in f(A)$
   Alors $\exists x \in A, y = f(x)$
   mais $A \subset B$ donc $x \in B$ et par suite $y = f(x) \in f(B)$
   Finalement $\boxed{f(A) \subset f(B)}$.
2. On raisonne par double inclusion.
   - ⋆ Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$ et comme $f(A) \subset f(A) \cup f(B)$, on a $y \in f(A) \cup f(B)$. Sinon, $x \in B$ et donc $y = f(x) \in f(B)$. Comme $f(B) \subset f(A) \cup f(B)$, on a $y \in f(A) \cup f(B)$. Dans les deux cas, on a montré que $y \in f(A) \cup f(B)$. On a bien montré que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

- ⋆ Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Or $A \subset A \cup B$ donc $a \in A \cup B$ et donc $y = f(a) \in f(A \cup B)$. Sinon, $y \in f(B)$ et donc il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Or $B \subset A \cup B$ donc $y = f(b) \in f(A \cup B)$. Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$. On a bien montré que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on a $\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$

3. Soient A et B deux parties de E. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B$, on a en particulier $x \in A$. Donc $y = f(x) \in f(A)$. De même, $x \in B$, donc $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. D'où l'inclusion $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$.

Exercice 13:

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. Supposons f et g surjectives.
   Montrons que $g \circ f$ est surjective.
   Soit $y \in G$ montrons que y admet au moins un antécédent dans E par $g \circ f$.
   Comme g est surjective, $\exists z \in F, g(z) = y$
   De plus f est surjective donc $\exists x \in E, f(x) = z$
   Finalement $\exists x \in E, g(f(x)) = y$ soit $g \circ f(x) = y$
   Ainsi :
   $$\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont surjectives,} g \circ f \text{ est surjective}}$$

2. Supposons f et g injectives.
   Montrons que $g \circ f$ est injective.
   Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$
   donc $g(f(x)) = f(f(x'))$
   Mais g est injective donc $g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x')$
   puis comme f est injective $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
   Ainsi :
   $$\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont injectives,} g \circ f \text{ est injective}}$$

3. Supposons $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons qu'alors $x_1 = x_2$. Comme $f(x_1) = f(x_2)$, on a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ et comme l'application $g \circ f$ est injective, on a $x_1 = x_2$. Donc f est injective. Finalement,
   $$\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}}$$

4. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $z \in G$. Comme l'application $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$, c'est-à-dire $g(f(x)) = z$. Donc $f(x)$ est un antécédent de z par l'application g dans F. On en déduit donc que g est surjective. Finalement,
   $$\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est surjective, alors } g \text{ est surjective}}$$

5. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrons que g est injective. Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tel que $g(y_1) = g(y_2)$. Montrons que $y_1 = y_2$. On sait que $y_1 \in F$ et $y_2 \in F$ (ensemble d'arrivée de f). Comme f est surjective, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a donc $g(y_1) = g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1)$ et $g(y_2) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ et comme $g(y_1) = g(y_2)$, on a $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Or l'application $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$. On a donc $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Ainsi, g est injective. Finalement,
   $$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \text{ injective}}$$

6. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$ et comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$, c'est-à-dire $g(f(x)) = g(y)$. Or g est injective donc $f(x) = y$. Ainsi, x est un antécédent de y par f. Donc f est surjective. Finalement,

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ surjective} \\ g \text{ injective} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ surjective}}$$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 14:

1. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \frac{1}{2}(-x + \frac{1}{-x}) = -\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) = -f(x)$.
   $\boxed{f \text{ est donc une fonction impaire}}$
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions qui le sont.
   $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x^2})$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.
   Comme la fonction est impaire, on en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. $\boxed{f \text{ n'est pas majorée sur } \mathbb{R}^*}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\boxed{f \text{ n'est pas minorée sur } \mathbb{R}^*}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
4. D'après le tableau de variations, on a :
   $\boxed{f([1, +\infty[) = [1, +\infty[}$
   $\boxed{f(\mathbb{R}^*) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$
   $\boxed{f([-1, 0[\cup]0, 1]) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$
5. (a) On a $f(\frac{1}{2}) = f(2) = \frac{5}{4}$
   Ainsi $\frac{5}{4}$ admet plusieurs antécédents par f dans $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$
   (b) D'après la tableau de variations, on constate que 0 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$
6. h admettra une réciproque si elle est bijective.
   Soit $y \in [1, +\infty[$ (ensemble d'arrivée)
   Résolvons sur $[1, +\infty[$ (ensemble de départ) l'équation $h(x) = y$.

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) = y \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2y \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2yx + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Le discriminant de cette dernière équation vaut $\Delta = 4(y^2 - 1)$
   Comme $y \in [1, +\infty[, \Delta \geq 0$
   — Si $y = 1, \Delta = 0$ et il n'y a qu'une solution $x = \frac{2y}{2} = 1 \in [1, +\infty[$

— Si $y > 1, \Delta > 0$ et l'équation admet sur $\mathbb{R}$ deux solutions :
$x_1 = \frac{2y-\sqrt{\Delta}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$ et $x_2 = y + \sqrt{y^2-1}$
Comme $y > 1$, on a clairement $x_2 > 1$
En revanche $x_1 = y - \sqrt{y^2-1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} < 1$

Finalement $\forall y \in [1,+\infty[, \exists! x \in [1,+\infty[$ tel que $h(x) = y$.

On en déduit que h est bijective et admet donc une réciproque :

$$\boxed{h^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & y + \sqrt{y^2-1} \end{array} \right. .}$$

Exercice 15:

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'x) = \frac{2}{3}\frac{x}{(x^2+1)^2}$
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0

   On a donc $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{3}, 0[$.

2. On remarque que f est paire donc elle ne peut pas être injective.
   Par construction l'ensemble d'arrivée étant $f(\mathbb{R})$, tous les éléments de cet ensemble admettent par f au moins un antécédent dans $\mathbb{R}$ donc f est surjective.

3. Prenons par exemple $I = \mathbb{R}_+$. On a alors $f(I) = [-\frac{1}{3}, 0[$.
   f est continue et strictement croissante de I dans $f(I)$ donc, d'après le théorème de la bijection, f est bijective de I dans $f(I)$. Déterminons sa réciproque.
   Soit $y \in [-\frac{1}{3}, 0[$. Résolvons sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = y$.

$$\begin{array}{lcl} f(x) = y & \Leftrightarrow & \frac{-1}{3(x^2+1)} = y \\ & \Leftrightarrow & -3(x^2+1) = \frac{1}{y} \\ & & \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-^* \\ & & \text{avec } \frac{-1}{3(x^2+1)} \in \mathbb{R}_-^* \text{ et } y \in \mathbb{R}_-^* \\ & \Leftrightarrow & x^2 = \frac{-1}{3y} - 1 = \frac{1+3y}{-3y} \geq 0 \text{ car } y \in [-\frac{1}{3}, 0[\\ & \Leftrightarrow & x = \sqrt{\frac{1+3y}{-3y}} \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1+3y}{-3y}} \notin \mathbb{R}_+ \end{array}$$

   Ainsi $\forall y \in [-\frac{1}{3}, 0[, \exists! x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$ donc f est bijective de réciproque :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} [\frac{-1}{3}, 0[& \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\frac{1+3y}{-3y}} \end{array} \right. .$$

Partie B

1.
```
def fonction(x):
    return -1 / (3 *(x**2+1))
```

2.
```
from math import *   # pour pouvoir utiliser la racine carrée
fonction(sqrt(2))
```

3. Ce programme cherche une valeur approchée à 10^{-4} près sur $\mathbb{R}+$ de la solution de l'équation $f(x) = y$ où $y \in [-\frac{1}{3}, 0[$.