TD13 – Correction

Exercice 1:

1. Toutes les inconnues sont principales. On trouve une unique solution, le triplet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.
2. Toutes les inconnues sont principales. On trouve une unique solution, le quadruplet $(-1, -3, 1, 2)$.
3. Les inconnues principales sont x et y tandis que z est l'inconnue secondaire. On a une infinité de solutions que l'on peut paramétrer par z. L'ensemble des solutions du système est
$$\mathcal{S} = \big\{(1+3z, -1-z, z) \,\big|\, z \in \mathbb{R}\big\}$$
4. Les inconnues sont principales sont x et z tandis que y est l'inconnue secondaire. L'ensemble des solutions du système est
$$\mathcal{S} = \big\{(2-y, y, 1) \,\big|\, y \in \mathbb{R}\big\}$$
5. Les inconnues principales sont x et z, les inconnues secondaires sont y et t. L'ensemble des solutions du système est
$$\mathcal{S} = \big\{(-3y+3t-3, y, -3+2t, t) \,\big|\, (y,t) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

Exercice 2: On utilise la méthode du pivot de Gauss pour résoudre les systèmes.

1. On commence par échelonner le système.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \\ -x & + & 2y & - & z & = & -9 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 16 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \\ & & 3y & & & = & -6 & \\ & & -4y & + & z & = & 10 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 4L_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & 3y & & & = & -6 \\ & & & & 3z & = & 6 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y - z + 3 = 2 - 2 + 3 = 3 \\ y & = & -2 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \big\{(3, -2, 2)\big\}$.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3 & \\ 2x & + & y & + & z & - & 2t & = & -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 3 \\ & & -3y & + & 3z & - & 4t & = & -7 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y + z - t + 3 = -z + \frac{5}{3}t - \frac{5}{3} \\ y & = & z - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3} \end{array}\right.$$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{5}{3} - z + \frac{5}{3}t, z - \frac{4}{3}t + \frac{7}{3}, z, t\right) \,\middle|\, (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
3. En échelonnant, on obtient des équations d'incompatibilité qui ne sont pas vérifiées donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \varnothing$.
4. On trouve une unique solution, le triplet $(1, -1, 0)$.

5. L'ensemble des solutions du système est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}, z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

6. Le système n'a pas de solution.
7. L'ensemble des solutions du système est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -z-1, z, -\frac{1}{2} \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 3:

1. On trouve une unique solution : le couple $(2,0)$. Ceci signifie graphiquement que les droites d'équation $x+y=2$ et $3x-y=6$ ont un unique point d'intersection qui est le point de coordonnées $(2,0)$.
2. Le système n'a pas de solution. On en déduit que les droites d'équations $x-y=1$, $3x+y=11$ et $2x-y=2$ ne sont pas concourantes.
3. L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{D} = \big\{(z,z,z) \,\big|\, z \in \mathbb{R}\big\}$. On en déduit graphiquement que les plans d'équations $x-y=0$ et $y-z=0$ se coupent suivant l'ensemble $\mathcal{D}$ qui est en fait une droite de vecteur directeur $(1,1,1)$.

Exercice 4: On notera naturellement $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_\lambda$ ou $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des solutions du système. La nature et l'ensemble des solutions va dépendre de la valeur de a, λ ou m.

1. On échelonne le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss et on aboutit à une équation de compatibilité faisant intervenir le paramètre a.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 1 & \\ x & - & 2y & = & a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2x & + & y & = & 2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 1 & \\ & - & 4y & = & a-1 & \\ & - & 3y & = & 2a-2 & L_3 \leftarrow 4L_3 - 3L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 \\ & - & 4y & = & a-1 \\ & & 0 & = & 5a-5 \end{array}\right.$$

   On trouve que le système est compatible si et seulement si $a=1$. Donc

$$\mathcal{S}_a = \varnothing \text{ si } a \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_a = \big\{(1,0)\big\} \text{ si } a = 1$$

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & az & = & 1 & \\ x & + & ay & - & z & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & - & (a+1)z & = & 0 \\ & & & & -(a+1)z & = & 0 \end{array}\right.$$

   On est amené à distinguer trois cas.
   - ⋆ Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, alors $\mathcal{S}_a = \big\{(1,0,0)\big\}$.
   - ⋆ Si $a = -1$, alors $\mathcal{S}_{-1} = \big\{(1+z,0,z) \,\big|\, z \in \mathbb{R}\big\}$.
   - ⋆ Si $a = 1$, alors $\mathcal{S}_1 = \big\{(1-y,y,0) \,\big|\, y \in \mathbb{R}\big\}$.
3. Avant d'échelonner le système, (pour ne pas avoir de pivot nul) on commence par inverser les 2 premières lignes. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ & & & & (3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2-(2-\lambda)L_1 \\ & & & & (3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ & & (1-(2-\lambda)^2)y & - & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ & & (-1+\lambda)(3-\lambda)y & - & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On est amené à distinguer trois cas.

- ⋆ Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$, alors $\mathcal{S}_\lambda = \big\{(0,0,0)\big\}$.
- ⋆ Si $\lambda = 1$, alors $\mathcal{S}_1 = \big\{(-y,y,0)\,\big|\, y\in\mathbb{R}\big\}$.
- ⋆ Si $\lambda = 3$, alors $\mathcal{S}_3 = \big\{(y,y,0)\,\big|\, y\in\mathbb{R}\big\}$.

4. On distingue deux cas, suivant que $a=2$ ou $a\neq 2$. Si $a\neq 2$, alors $\mathcal{S}_a = \big\{(0,0,0)\big\}$. Si $a=2$, alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_2 = \big\{(-z,-z,z)\,\big|\, z\in\mathbb{R}\big\}$.
5. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$S_\lambda \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & (1-\lambda)y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ -x & + & (1-\lambda)y & - & z & = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ (1-\lambda)x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & - & (2-\lambda)z & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & -(2-\lambda)y & - & \lambda(2-\lambda)z & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & - & (2-\lambda)z & = & 0 \\ & & & - & (2-\lambda)(\lambda+1)z & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Le système est échelonnée. Il reste à distinguer les cas où les pivots peuvent s'annuler.

— 1er cas : $\lambda = -1$

$$rg(S_{-1}) = 2$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_{-1} = \{(z,z,z) | z\in\mathbb{R}\}$$

— 2eme cas : $\lambda = 2$

$$rg(S_2) = 1$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_2 = \{(-z-y, y, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

— 3eme cas : $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.
Le système est de rang 3 Le système admet une unique solution (0,0,0)

6. Soit $m \in \mathbb{R}$, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$S_m \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} (-1-m)x & + & my & + & 2z & = & 0 \\ -mx & + & y & + & mz & = & 0 \\ -2x & + & my & + & (3-m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & my & + & (3-m)z & = & 0 \\ -mx & + & y & + & mz & = & 0 \\ (-1-m)x & + & my & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} -2x & + & my & + & (3-m)z & = & 0 & \\ & & (2-m^2)y & + & (m^2-m)z & = & 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - mL_1 \\ & & m(1-m)y & + & (4-(1+m)(3-m))z & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - (1+m)L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & my & + & (3-m)z & = & 0 \\ & & (2-m^2)y & + & m(m-1)z & = & 0 \\ & & m(1-m)y & + & (m-1)^2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour poursuivre, on distingue le cas $m = 0$
1er cas $m = 0$:

$$S_0 \iff \left\{\begin{array}{ccccc} -x & & + \; 3z & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \\ & & + \; z & = & 0 \end{array}\right.$$

L'unique solution est $(0, 0, 0)$
Soit $m \neq 0$

$$S_m \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} -2x & + & my & + & (3-m)z & = & 0 & \\ & & (2-m^2)y & + & m(m-1)z & = & 0 & \\ & & 2(1-m)y & + & & = & 0 & L_3 \leftarrow mL_3 - (m-1)L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & (3-m)z & + & my & = & 0 \\ & & m(m-1)z & + & (2-m^2)y & = & 0 \\ & & & & 2(1-m)y & = & 0 \end{array}\right.$$

2eme cas $m = 1$

$$S_1 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & 2z & + & 1y & = & 0 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$rg(S_1) = 2$$

L'ensemble des solution est

$$\mathcal{S}_1 = \{(z, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

3eme cas :$m \in \mathbb{R}\backslash\{1; 0\}$
Le rang du système est 3. Le système à une unique solution $(0, 0, 0)$.

7. On distingue trois cas.
   - ⋆ Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors le système admet une unique solution. On a

   $$\mathcal{S}_m = \left\{\left(-\frac{1+m}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}$$

   - ⋆ Si $m = -2$, alors le système n'a pas de solution : $\mathcal{S}_{-2} = \varnothing$.
   - ⋆ Si $m = 1$, alors $\mathcal{S}_1 = \big\{(1 - y - z, y, z) \,\big|\, (y, z) \in \mathbb{R}^2\big\}$.

Exercice 5:

1. On a $\mathrm{j}^3 = 1$ (formule de Moivre) et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique).
2. On note $\mathcal{S}_m$ l'ensemble des solutions du système. On échelonne le système. On trouve qu'il est de rang maximal égal à 3 si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -2$. On distingue donc trois cas.
   - ⋆ Si $m = 1$, alors le système n'est pas compatible : $\mathcal{S}_1 = \varnothing$.
   - ⋆ Si $m = -2$, alors

   $$\mathcal{S}_{-2} = \left\{\left(\frac{1}{3}\mathrm{j}^2 + \frac{2}{3} + z, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{j}^2 + z, z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

   - ⋆ Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors

   $$\mathcal{S}_m = \left\{\left(\frac{\mathrm{j}}{m-1}, \frac{\mathrm{j}^2}{m-1}, \frac{1}{m-1}\right)\right\}$$

Exercice 6: Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$ tel que $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Alors $P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Donc

$$\left\{\begin{array}{c} P(-1) = a \\ P'(-1) = b \\ P(1) = c \\ P(1) = d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} -\alpha & + & \beta & - & \gamma & + & \delta & = & a \\ 3\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & & & = & b \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & c \\ 3\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & & & = & d \end{array}\right.$$

$$\iff \dots$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} -\alpha & + & \beta & - & \gamma & + & \delta & = & a \\ & & \beta & - & 2\gamma & + & 3\delta & = & 3a + b \\ & & & & 4\gamma & - & 4\delta & = & -5a - 2b + c \\ & & & & & - & 4\delta & = & -2a - b - 2c + d \end{array}\right.$$

On obtient un système échelonné de rang maximal égal à 4. Le système admet donc une unique solution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Ceci signifie qu'il existe un unique polynôme P vérifiant les quatre relations données dans l'énoncé.
Remarque. Il n'est pas demandé dans l'énoncé d'expliciter le polynôme solution.

Exercice 7: D'après les relations coefficients racines, un couple de nombres réels (x, y) est solution du système si et seulement si x et y sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2 + 2z - 3 = 0$. Les solutions de cette équation sont 1 et -3. Donc l'ensemble des solutions du système est $\big\{(1, -3), (-3, 1)\big\}$. Or un système linéaire ne peut pas avoir deux solutions. En effet, un tel système a toujours zéro, une seule ou une infinité de solutions. On en déduit que le système proposé n'est pas équivalent à un système linéaire.

Exercice 8: Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan dont les affixes sont notées respectivement m_1, m_2 et m_3. Alors le triangle $M_1M_2M_3$ est solution du problème si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} \frac{m_2+m_3}{2} = a_1 \\ \frac{m_1+m_3}{2} = a_2 \\ \frac{m_1+m_2}{2} = a_3 \end{array}\right.$. On trouve un unique triangle solution. Les affixes cherchées sont $m_1 = -a_1 + a_2 + a_3$, $m_2 = a_1 - a_2 + a_3$ et $m_3 = a_1 + a_2 - a_3$.

Exercice 9:

1. Échelonnons le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_a) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} -x & + & y & + & z & = & 1-3a & L_1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 1-9a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 2 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} -x & + & y & + & z & = & 1-3a & \\ & & 3y & + & 5z & = & 5-6a & \\ & & 3y & & & = & -6a & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ & & 5y & + & 2z & = & 5-9a & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} -x & + & y & + & z & = & 1-3a & \\ & & 3y & + & 5z & = & 5-6a & \\ & & y & & & = & -2a & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ & & 5y & + & 2z & = & 5-9a & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} -x & + & y & + & z & = & 1-3a & \\ & & y & & & = & -2a & L_2 \\ & & 3y & + & 5z & = & 5-6a & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ & & 5y & + & 2z & = & 5-9a & L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} -x & + & y & + & z & = & 1-3a & \\ & & y & & & = & -2a & \\ & & & & 5z & = & 5 & L_3 \\ & & & & 2z & = & a+5 & L_4 \leftarrow 5L_4 - 2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 1-3a \\ & & y & & & = & -2a \\ & & & & 5z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 5a+15 \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné de rang 3 avec une équation de compatibilité : $0 = 5a+15$. Si cette équation est vérifiée, alors le système est compatible et on peut résoudre le système par la technique de la remontée ; sinon le système est incompatible. Ainsi, si $a = -3$, le système donne

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 10 \\ & & y & & & = & 6 \\ & & & & 5z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & -3 \\ & y & & = & 6 \\ & & z & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Si $a = -3$, alors $\mathcal{S} = \{(-3, 6, 1)\}$, sinon $\mathcal{S} = \varnothing$.

Exercice 10: Pour tout $\lambda \in\in \mathbb{R}$, on notera $\mathrm{Sol}(\lambda)$ l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_\lambda)$. On commence par échelonner le système $(\mathcal{S}_\lambda)$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} (2-\lambda)x & + & 3y & - & 3z & = & 0 & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ 3x & + & (2-\lambda)y & - & 3z & = & 0 & \\ 3x & + & 3y & - & (4+\lambda)z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} 3x & + & (2-\lambda)y & - & 3z & = & 0 & \\ (2-\lambda)x & + & 3y & - & 3z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow 3\mathrm{L}_2 - (2-\lambda)\mathrm{L}_1 \\ 3x & + & 3y & - & (4+\lambda)z & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} 3x & + & (2-\lambda)y & - & 3z & = & 0 & \\ & & (1+\lambda)(5-\lambda)y & - & 3(1+\lambda)z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \\ & & (1+\lambda)y & - & (1+\lambda)z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl l} 3x & + & (2-\lambda)y & - & 3z & = & 0 & \\ & & (1+\lambda)y & - & (1+\lambda)z & = & 0 & \\ & & (1+\lambda)(5-\lambda)y & - & 3(1+\lambda)z & = & 0 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - (5-\lambda)\,\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & (2-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & (1+\lambda)y & - & (1+\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (1+\lambda)(2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On distingue maintenant trois cas suivant que $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

- ⋆ **Premier cas :** $\lambda = -1$. Alors

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{-1}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff x + y - z = 0 \\
&\iff (x, y, z) = (-y + z, y, z)
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_{-1})$ est donc

$$\boxed{\mathrm{Sol}(-1) = \left\{(-y + z, y, z) \,\middle|\, (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

- ⋆ **Deuxième cas :** $\lambda = 2$. Alors

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}_{-1}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & & & - & 3z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & z \\ y & = & z \end{array}\right. \\
&\iff (x, y, z) = (z, z, z)
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_2)$ est donc

$$\boxed{\mathrm{Sol}(2) = \left\{(z, z, z) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}}$$

- ⋆ **Troisième et dernier cas :** $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Alors $1 + \lambda \neq 0$ et $(1 + \lambda)(2 - \lambda) \neq 0$ donc, en remontant le système échelonné obtenu, on a

$$
(\mathcal{S}_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.
$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_\lambda)$ est donc $\boxed{\mathrm{Sol}(\lambda) = \left\{(0, 0, 0)\right\}}$.