

TD16 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice 1:

1. Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 10. $Card(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$.
2. $\Omega = \llbracket 1, 10 \rrbracket^3$ (produit cartésien). $Card(\Omega) = 10^3 = 1000$.
3. $\Omega = \llbracket 1, 12 \rrbracket^3$ et $Card(\Omega) = 12^3 = 1728$. Remarque : $\Omega = \{R, V, N\}^3$ ne permet pas d'avoir l'équiprobabilité.
4. Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes parmi 32. $Card(\Omega) = \binom{32}{5}$.
5. Ω est l'ensemble des 5-listes sans répétition de l'ensemble des vaches. $Card(\Omega) = \frac{50!}{45!}$.
6. Ω est l'ensemble des permutations du jeu de cartes. $Card(\Omega) = 32!$.
7. Si on considère les 21 résultats possibles, on n'a pas équiprobabilité. On suppose les deux dés distincts et on prend $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. On a $card(\Omega) = 6^2 = 36$.
8. Idem précédemment.

Exercice 2:

1. $E_1 = A \cap B \cap C$
2. $E_2 = \overline{E_1} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
3. $E_3 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
4. $E_4 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
5. $E_5 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
6. $E_6 = A \cup B \cup C$
7. $E_7 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
8. $E_8 = E_2$

Exercice 3:

On prend comme univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ de cardinal 36.

On se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ où P est la probabilité uniforme.

$$Card(A) = 1 \text{ donc } P(A) = \frac{1}{36}.$$

$$Card(B) = 6 \text{ donc } P(B) = \frac{1}{6}.$$

$$C = \{2, 4, 6\}^2 \text{ donc } Card(C) = 3^2 = 9 \text{ d'où } P(C) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Il y a 6 manières de faire 7 d'où } P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 4:

1) On tire les chaussettes de manière simultanée.

On a 24 paires de chaussettes, on en tire 4. Ω est l'ensemble des combinaisons de 4 éléments parmi 24.

1. Obtenir 2 paires complètes revient à dire qu'on a tiré 2 paires parmi les 12. il y a donc $\binom{12}{2}$ possibilités.

$$\text{Ainsi } p_1 = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{66}{10626} \approx 0,006.$$

2. Notons A_0 l'évènement : on obtient aucune paire. Calculons $Card(A_0)$.

Il faut choisir 4 paires parmi les 12 puis pour chaque paire une des chaussettes donc $card(A_0) = \binom{12}{4} \times 2^4$.

$$\text{Ainsi } P(A_0) = \frac{\binom{12}{4} \times 2^4}{\binom{24}{4}} \approx 0.745. \text{ On en déduit } P(\overline{A_0}) \approx 0.255.$$

3. Notons A_i on obtient exactement i paires.

$$A_1 = \overline{A_0} \setminus A_2 \text{ et } A_2 \subset \overline{A_0} \text{ donc } A_1 = \overline{A_0} \cap \overline{A_2}$$

$$\text{d'où } P(A_1) = P(\overline{A_0}) - P(A_2) \approx 0.255 - 0.006 \approx 0.249.$$

On peut aussi faire le calcul directement en choisissant une paire parmi les 12 puis 2 paires parmi les 11 restantes et pour chacune de ces paires, on choisit une chaussette parmi 2.

- 2) On tire les chaussettes de manière successive.

On a 24 paires de chaussettes, on en tire 4. Ω est l'ensemble des 4-liste sans répétition de l'ensemble des 24 chaussettes.

1. Pour construire un tirage de 2 paires complète, il faut :

★ choisir les 2 paires complètes : $\binom{12}{4}$ possibilités.

★ choisir l'ordre des chaussettes : $4!$ possibilités.

$$\text{Ainsi } p_1 = \frac{\binom{12}{4} \times 4!}{24 \times 23 \times 22 \times 21} = \frac{66}{10626} \approx 0,006.$$

2. Notons A_0 l'évènement : on obtient aucune paire. Calculons $\text{Card}(A_0)$.

Il faut choisir 4 paires parmi les 12 puis pour chaque paire une des chaussettes et ensuite choisir l'ordre des tirages donc $\text{card}(A_0) = \binom{12}{4} \times 2^4 \times 4!$.

$$\text{Ainsi } P(A_0) = \frac{\binom{12}{4} \times 2^4 \times 4!}{24 \times 23 \times 22 \times 21} \approx 0.745. \text{ On en déduit } P(\overline{A_0}) \approx 0.255.$$

3. Notons A_i on obtient exactement i paires.

$$A_1 = \overline{A_0} \setminus A_2 \text{ et } A_2 \subset \overline{A_0} \text{ donc } A_1 = \overline{A_0} \cap \overline{A_2}$$

$$\text{d'où } P(A_1) = P(\overline{A_0}) - P(A_2) \approx 0.255 - 0.006 \approx 0.249.$$

On peut aussi faire le calcul directement en choisissant une paire parmi les 12 puis 2 paires parmi les 11 restantes et pour chacune de ces paires, on choisit une chaussette parmi 2 et on choisit l'ordre.

- 3) On tire les chaussettes de manière successive avec remise. Exercice en autonomie.

Exercice 5:

$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ de cardinal 36.

On se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}(\Omega), P)$ où P est la probabilité uniforme.

Soit S : la somme des faces est supérieure ou égale à 7.

1. Soit A_1 : Le premier lancer a donné 4.

$$P(S|A_1) = \frac{P(S \cap A_1)}{P(A_1)}.$$

$$\text{Or } P(A_1) = \frac{1}{6} \text{ et } S \cap A_1 = \{(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\} \text{ d'où } P(S \cap A_1) = \frac{4}{36}.$$

$$\text{Ainsi } P(S|A_1) = \frac{2}{3}.$$

2. Soit A_2 : le premier lancer a donné un nombre supérieur ou égal à 4.

$$P(S|A_2) = \frac{P(S \cap A_2)}{P(A_2)}.$$

$$\text{Or } P(A_2) = \frac{3}{6} \text{ et } S \cap A_2 = \{(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \dots, (6, 5), (6, 6)\} \text{ d'où } P(S \cap A_2) = \frac{15}{36}.$$

$$\text{Ainsi } P(S|A_2) = \frac{5}{6}.$$

3. Soit A_3 : le premier lancer a donné 1.

$$P(S|A_3) = \frac{P(S \cap A_3)}{P(A_3)}.$$

$$\text{Or } P(A_3) = \frac{1}{6} \text{ et } S \cap A_3 = \{(1, 6)\} \text{ d'où } P(S \cap A_3) = \frac{1}{36}.$$

$$\text{Ainsi } P(S|A_3) = \frac{1}{6}.$$

4. Soit A_4 : le premier lancer a donné un résultat inférieur ou égal à 4.

$$P(S|A_4) = \frac{P(S \cap A_4)}{P(A_4)}.$$

Or $P(A_4) = \frac{4}{6}$ et $S \cap A_4 = \{(1, 6), (2, 5), (2, 6), \dots, (4, 6)\}$ d'où $P(S \cap A_4) = \frac{10}{36}$.

Ainsi $P(S|A_4) = \frac{5}{12}$.

Exercice 6:

On prend comme univers l'ensemble des 3-listes sans répétition parmi 10, de cardinal $\frac{10!}{(10-3)!} = 720$.

Notons N_i la i ème boule est noire et V_i la i ème boule est verte. On cherche $P(N_1 \cap V_2 \cap N_3)$.

On utilise la formule des probabilités composées, avec $P(N_1 \cap V_2) \neq 0$:

$$P(N_1 \cap V_2 \cap N_3) = P(N_1) \times P(V_2|N_1) \times P(N_3|N_1 \cap V_2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{40}.$$

Exercice 7:

1. (a) L'expérience aléatoire est en deux parties. On choisit d'abord un sac puis on pioche dans ce sac. On va donc utiliser le système complet d'événements de probabilités non nulles $(S_1, S_2, \dots, S_n)$. On note G_1 l'événement gagner après un tirage et $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ choisir le i -ème sac. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_1) = \sum_{i=1}^n P(S_i \cap G_1) = \sum_{i=1}^n P(S_i)P(G_1|S_i)$$

On choisit chaque sac au hasard, avec la même probabilité. On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(S_i) = \frac{1}{n}$.

Si on a choisi le i ème sac on a i jetons gagnants sur $n+1$. Donc on a $P(G_1|S_i) = \frac{i}{n+1}$. Donc :

$$P(G_1) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On cherche la probabilité $P(S_k|G_1)$. Or $P(G_1) \neq 0$ et $P(S_k) \neq 0$. D'après la formule de Bayes :

$$P(S_k|G_1) = \frac{P(S_k)P(G_1|S_k)}{P(G_1)} = \frac{\frac{1}{n} \times \frac{k}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

2. On note G_i l'événement gagner au i ème tirage. On cherche donc la probabilité de l'événement $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3$.

Commençons par écrire grâce à la formule des probabilités composées ($P(\overline{G_1}) \neq 0$) que :

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3) = P(\overline{G_1})P(\overline{G_2} \cap G_3|\overline{G_1})$$

Il reste à calculer $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3)$. Utilisons le système complet d'événements de probabilités non nulles $(S_1, S_2, \dots, S_n)$. D'après la formule des probabilités totales pour la probabilité $P_{\overline{G_1}}$ (les sacs contenant moins de deux jetons non gagnants sont à enlever donc le sac n) :

$$P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3) = \sum_{k=1}^{n-1} P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3 \cap S_k)$$

Appliquons la formule des probabilités composées généralisées ($P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3 \cap S_k) \neq 0$) pour la probabilité $P_{\overline{G_1}}$:

$$P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3 \cap S_k) = P_{\overline{G_1}}(S_k)P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}|S_k)P_{\overline{G_1}}(G_3|S_k \cap \overline{G_2})$$

Pour calculer $P_{\overline{G_1}}(S_k)$ on applique la formule de Bayes :

$$P_{\overline{G_1}}(S_k) = \frac{P(S_k)P_{S_k}(\overline{G_1})}{P(\overline{G_1})} = \frac{\frac{1}{n} \frac{n+1-k}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)}$$

Calculons

$$P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}|S_k) = \frac{P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap S_k)}{P_{\overline{G_1}}(S_k)} = \frac{P(\overline{G_2} \cap S_k \cap \overline{G_1})P(\overline{G_1})}{P(\overline{G_1})P(S_k \cap \overline{G_1})} = P_{\overline{G_1} \cap S_k}(\overline{G_2})$$

Ce qui correspond à l'intuition. La probabilité conditionnelle cherchée consiste donc en la probabilité de perdre au deuxième tirage sachant qu'on a perdu au premier et qu'on tirait dans le sac k . Il n'y a plus que n jetons dans le sac et toujours k jetons gagnants. Donc $P_{\overline{G_1} \cap S_k}(\overline{G_2}) = \frac{n-k}{n}$.

On calcule de même $P_{\overline{G_1}}(G_3|S_k \cap \overline{G_2}) = P_{S_k \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_1}}(G_3) = \frac{k}{n-1}$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2} \cap G_3) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n+1-k)}{n(n+1)} \frac{n-k}{n} \frac{k}{n-1} \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n+1-k)(nk-k^2) \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (n+1)nk - (n+1)k^2 - nk^2 + k^3 \\ &= \frac{2}{n^2(n+1)(n-1)} \left(\frac{(n+1)(n-1)n^2}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left((n+1)n - \frac{(2n+1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(-\frac{4n^2-1}{3} + \frac{n(3n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{-8n^2+2+3n(3n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{-8n^2+2+9n^2+3n}{6} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{n^2+3n+2}{6} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{n+2}{6n} \end{aligned}$$

Donc

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3) = (1 - P(G_1)) \frac{n+2}{6n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{n+2}{6n} = \frac{n+2}{12n}$$

Exercice 8:

- Dans cet exercice il ne faut pas supposer l'indépendance des lancers. Donc par exemple ne pas multiplier $P(A)$ et $P(B)$ pour trouver $P(A \cap B)$. Il faut considérer comme univers Ω l'ensemble des 3-listes de l'ensemble $\{P, F\}$ et comme probabilité la probabilité uniforme.

(a) $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{8}$ d'où $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants.

(b) $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(D) = \frac{2}{8}$ et $P(A \cap D) = \frac{1}{8}$ donc A et D sont indépendants.

(c) $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(E) = \frac{3}{8}$ et $P(A \cap E) = \frac{1}{8}$ donc A et E ne sont pas indépendants.

(d) $P(D) = \frac{2}{8}$ et $P(E) = \frac{3}{8}$ et $P(D \cap E) = 0$ donc D et E ne sont pas indépendants.

- (a) On a déjà A et B indépendants, B et C indépendants, A et C indépendants. Il reste à vérifier $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Or $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$ donc A B et C sont mutuellement indépendants.

- (b) Les indépendances deux à deux sont déjà vérifiées. Or $P(A \cap B \cap D) = 0$ et $P(A) \times P(B) \times P(D) = \frac{1}{16}$ donc A, B et D ne sont pas mutuellement indépendants.
- (c) D et E ne sont pas indépendants donc pas d'indépendance mutuelle.

Exercice 9:

Notons :

A : le poisson est pêché par Alex

Pa : le poisson est pêché par Paul

G : le poisson est un gardon

B : le poisson est un brochet

D'après l'énoncé on a :

$$P(Pa) = \frac{1}{4} \text{ et } P(A) = \frac{3}{4}.$$

$$P(G|Pa) = \frac{2}{3} \text{ et } P(B|Pa) = \frac{1}{3}.$$

$$P(G|A) = \frac{1}{2} \text{ et } P(B|A) = \frac{1}{2}.$$

On cherche $P(A|B)$.

D'après la formule de Bayes, puisque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Calculons $P(B)$ grâce à la formule des probabilités totales dans le système complet $\{Pa, A\}$ d'évènements de probabilités non nulles.

$$P(B) = P(Pa) \times P_{Pa}(B) + P(A) \times P_A(B)$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$$

$$\text{Ainsi } P(A|B) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}} = \frac{9}{11}$$

Exercice 10:

Notons :

V : le premier animal qui sort est une vache

C : le premier animal qui sort est un cheval

Po : le premier animal qui sort est une poule

A : l'animal appartient à l'éleveur A

B : l'animal appartient à l'éleveur B

1. On cherche $P(C)$.

Dans le système complet d'évènements de probabilités non nulles $\{A, B\}$, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A) \times P_A(C) + P(B) \times P_B(C)$$

$$P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{16}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{12}{100} = \frac{3}{20}.$$

2. On cherche $P_V(A)$.

On calcule $P(V)$ en appliquant la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements de probabilités non nulles $\{A, B\}$

$$P(V) = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V) = \frac{3}{4} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{68}{100} = \frac{3}{20} = \frac{31}{50}.$$

On applique ensuite la formule de Bayes (comme $P(V) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$) :

$$P_V(A) = \frac{P(A) \times P_A(V)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{60}{100}}{\frac{31}{50}} = \frac{45}{62}$$

3. L'évènement "M : c'est un mammifère" correspond à $V \cup C$ avec V et C incompatibles.

$$\text{Ainsi } P(V \cup C) = P(V) + P(C) = \frac{31}{50} + \frac{3}{20} = \frac{77}{100}$$

On cherche $P_M(B)$.

D'après la formule de Bayes avec $P(M) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$P_M(B) = \frac{P(B) \times P_B(M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{80}{100}}{\frac{77}{100}} = \frac{20}{77}$$

Je me perfectionne !

Exercice 11:

1. $P(Q_1) = 1$.

2. Soit E : le candidat a répondu à toutes les questions. On a $E = \bigcap_{k=1}^n Q_k$.

D'après la formule des probabilités composées, puisque $P(Q_1 \cap Q_2 \dots \cap Q_{n-1}) \neq 0$:

$$P(E) = P(Q_1) \times P(Q_2|Q_1) \times \dots \times P(Q_n|Q_1 \cap Q_2 \dots \cap Q_{n-1})$$

Or $P(Q_2|Q_1) = \frac{1}{2}$, $P(Q_3|Q_1 \cap Q_2) = \frac{1}{3}$ etc.

Donc $P(E) = \frac{1}{n!}$.

3. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$P(G_k) = P(Q_1 \cap \dots \cap Q_k \cap \overline{Q_{k+1}}) = P(Q_1) \times P(Q_2|Q_1) \times \dots \times P(\overline{Q_{k+1}}|Q_1 \cap \dots \cap Q_k).$$

Or $P(Q_{k+1}|Q_1 \cap \dots \cap Q_k) = \frac{1}{k+1}$ donc $P(\overline{Q_{k+1}}|Q_1 \cap \dots \cap Q_k) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$.

Donc $P(G_k) = \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 12:

1. $x_0 = a$. On $x_{n+1} = x_n + 1$ (avec probabilité p) ou $x_{n+1} = x_n - 1$ (avec probabilité q).

2. (a) $d_0 = 1$ et $d_N = 0$.

(b) Soit a tel que $1 \leq a \leq N-1$. Définissons pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$ l'événement A_0^a : en partant de a on s'arrête en 0.Considérons l'événement B on fait un pas d'amplitude $+1$ au premier pasConsidérons l'événement C on fait un pas d'amplitude -1 au premier pas

On a alors $A_0^a = (C \cap A_0^{a-1}) \cup (B \cap A_0^{a+1})$.

En effet si on part en a on a le choix de faire un pas d'amplitude -1 ou 1 . Dans le premier cas on arrive en $a-1$ et il reste à aller en 0 à partir de $a-1$. Dans le second cas on arrive en $a+1$ et il reste à se rendre en 0 à partir de $a+1$.On a donc $d_a = P(A_0^a) = P((C \cap A_0^{a-1}) \cup (B \cap A_0^{a+1}))$. Par incompatibilité puis en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
 d_a &= P(A_0^{a-1})P_{A_0^{a-1}}(C) + P(A_0^{a+1})P_{A_0^{a+1}}(B) \\
 &= qd_{a-1} + pd_{a+1}
 \end{aligned}$$

(c) On a donc : $d_{a+1} = \frac{1}{p}d_a - \frac{q}{p}d_{a-1}$. On obtient donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à

coefficient constant d'équation caractéristique : $r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p}$, de discriminant $\Delta = \frac{(2p-1)^2}{p^2}$.

Comme $p \neq 1/2$ le discriminant est strictement positif l'équation admet deux racines :

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{q}{p}. \text{ Il existe donc } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que pour tout } a \in \llbracket 0, N \rrbracket :$$

$$d_a = A + B \left(\frac{p}{q}\right)^a$$

Mais $d_0 = 1$ et $d_N = 0$. Donc $A + B = 1$ et $A + B \left(\frac{p}{q}\right)^N = 0$. Donc $A = -B \left(\frac{p}{q}\right)^N$ et

$$B \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N\right) = 1.$$

On obtient donc $B = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$ et $A = -\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$

3. On applique la même idée que dans la question précédente. On trouve la même formule de récurrence $f_a = qf_{a-1} + pf_{a+1}$.

Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$f_a = A + B \left(\frac{p}{q}\right)^a$$

Mais on a $f_0 = 0$ et $f_N = 1$. Donc $A = -B$ et $A + B \left(\frac{p}{q}\right)^N = 1$. Donc on a $A = -B$ et $A(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N) = 1$.

$$1. A = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} \text{ et } B = -\frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}$$

$$4. \text{ Soit } a \in \llbracket 0, N \rrbracket : d_a + f_a = -\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^a}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} + \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} - \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^a}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N} = 1$$

La probabilité que le processus ne finisse pas est donc nulle.

Exercice 13:

Soit A_k : la cible de 20m est atteinte au k-ième lancer.

Soit B_k : la cible de 50m est atteinte au k-ième lancer.

Soit G : il gagne.

Etudions les deux stratégies.

il commence par une cible à 20m

$$P(G) = P(A_1 \cap B_2) + P(\overline{A_1} \cap B_2 \cap A_3)$$

Comme les tirs sont indépendants, $P(G) = pq + (1-p)qp = pq(2-p)$.

il commence par une cible à 50m

$$P(G) = P(B_1 \cap A_2) + P(\overline{B_1} \cap A_2 \cap B_3)$$

Comme les tirs sont indépendants, $P(G) = qp + (1-q)pq = pq(2-q)$.

Or $p > q$ (car la cible de 20m est plus près) donc la deuxième stratégie a une plus grande probabilité. Il vaut mieux commencer par la cible à 50m.

Exercice 14:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ D'après l'énoncé, $p_1 = 1$, $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{4}$, $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{1}{10}$.

$$2. P(E_{n+1} \cap E_n) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{4}p_n$$

$$P(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{1}{10}(1 - p_n)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On applique la formule des probabilités totales dans le système complet $\{E_n, \overline{E_n}\}$ d'événements de probabilités non nulles :

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{10}(1 - p_n)$$

$$P(E_{n+1}) = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$$

4. (p_n) est une suite arithmético géométrique. On détermine son terme général avec la méthode habituelle.

$$\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}$$

5. Comme $\left|\frac{13}{20}\right| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{7}$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 15:

Partie A : étude des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- ★ À l'instant $t = 0$, la guêpe est dans la salle A donc $a_0 = 1, b_0 = s_0 = 0$.
 ★ À l'instant $t = 1$, la guêpe peut ou bien rester dans la salle A avec la probabilité $1/3$, ou bien aller dans la salle B avec probabilité $2/3$. Donc

$$a_1 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3} \text{ et } s_1 = 0$$

- On cherche $P_{A_2}(B_1)$. Comme $P(A_2) \neq 0$ et $P(B_1) \neq 0$, on a d'après la formule de Bayes :

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P_{B_1}(A_2)P(B_1)}{P(A_2)}$$

On cherche maintenant $P(A_2)$. Comme $\{A_1, B_1\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P_{A_1}(A_2) \times P(A_1) + P_{B_1}(A_2) \times P(B_1) = \frac{a_1}{3} + \frac{b_1}{4} = \frac{5}{18}$$

et donc

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

Remarque. On ne pouvait pas considérer le système complet d'événements $\{A_1, B_1, S_1\}$ car S_1 est de probabilité nulle ... Et donc les hypothèses du théorème concernant la formule des probabilités totales ne sont pas satisfaites.

- À partir de l'instant $n = 2$, la guêpe peut se retrouver dehors. Ainsi, si n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, on a $P(S_n) \neq 0$. Comme $\{A_n, B_n, S_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{S_n}(A_{n+1})P(S_n)$$

c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{4} + s_n \times 0 = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{4}$. De la même manière,

$$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{S_n}(B_{n+1})P(S_n)$$

c'est-à-dire $b_{n+1} = \frac{2a_n}{3} + \frac{b_n}{2} + s_n \times 0 = \frac{2a_n}{3} + \frac{b_n}{2}$.

Remarque. On peut vérifier que ces égalités sont vérifiées aussi pour $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. D'après la question 1.(c), on a (puisque $n - 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) :

$$b_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{2} = 2 \left(\frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{4} \right) = 2a_n$$

Il reste à vérifier cette égalité pour $n \in \{1, 2\}$. On sait que $b_1 = \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = 2a_1$. Ensuite, $a_2 = \frac{5}{18}$ et comme $\{A_1, B_1\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$b_2 = P(B_2) = P_{A_1}(B_2)P(A_1) + P_{B_1}(B_2)P(B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} = 2a_2$$

Finalement pour tout entier naturel n non nul, on a $b_n = 2a_n$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{4} = \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{4} = \frac{5}{6}a_n$$

Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $a_1 = \frac{1}{3}$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} \text{ et } b_n = 2a_n = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

6. Comme $\frac{5}{6} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

7. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Comme $\{A_n, B_n, S_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(S_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(S_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1})$$

soit $s_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + s_n \times 1$. Donc $s_{n+1} = s_n + \frac{b_n}{4}$. On remarque que cette formule reste vraie pour $n = 1$ car $s_1 + \frac{b_1}{4} = \frac{1}{6} = s_2$.

(b) On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{4} \gg$.

★ **Initialisation.** Montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie. On a

$$\sum_{k=1}^{2-1} \frac{b_k}{4} = \frac{b_1}{4} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad s_2 = 1 - a_2 - b_2 = 1 - \frac{5}{18} - \frac{5}{9} = \frac{1}{6}$$

car $\{A_2, B_2, S_2\}$ est un système complet d'événements donc la proposition $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

★ **Hérédité.** soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que la proposition $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

Montrons que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après la question 2.(a), on a $s_{n+1} = s_n + \frac{b_n}{4}$ et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation de Chasles,

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{4} + \frac{b_n}{4} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{4} = \sum_{k=1}^{(n+1)-1} \frac{b_k}{4}$$

ce qui montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

★ **Conclusion.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{5}{6} \right)^i \quad (\text{changement d'indice } i = k-1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{6}} \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{5}{6} \neq 1$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad s_n = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

Comme $\frac{5}{6} \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Ainsi, la guêpe finira de façon certaine par sortir de la ruche.

Partie B : modélisation informatique

1. Pour faire une affectation simultanée, le plus simple est d'utiliser la commande `a,b=b,a`.

```
def probabilites(n) :
    a=1
    b=0
    s=0
    for k in range(n):
        s = s+b/4
        a,b = a/3+b/4,2*a/3+b/2
    return a,b,s
```

2. Les différentes pièces sont modélisées par les lettres A, B et S. On simule les probabilités de changements de salles en choisissant aléatoirement des entiers.

```
from random import*
def parcours() :
    L = ['A'] #la guêpe est initialement dans la pi\ece A
    while L[-1] != 'S' #S désigne l'extérieur
        if L[-1] == 'A' :
            x = randint(1,3)
            if (x==1) :
                L.append('A')
            else :
                L.append('B')
        else : #la guêpe est dans la pièce B
            x = randint(1,4)
            if x == 1 :
                L.append('A')
            elif (x == 2 or x == 3) :
                L.append('B')
            else :
                L.append('C')
    return L
```

3. On commence par générer le parcours de la liste avec la fonction précédente.

```
L = parcours()
n = len(L)
compteur = 0
for k in range(n-1) :
    if (L[k] != L[k+1]) :
        compteur = compteur+1
print('le nombre de changement de pièces est : ',compteur)
```