

## Semaine n°20 du 10 au 14 mars

## Informatique(Python) : cf exemples en annexe

- boucle `while`, boucle `for`,
- listes en Python : création d'une liste, extraction d'un élément, parcours d'une liste, concaténation, `len`, `append`...etc
- chaîne de caractère.
- Tri par sélection, tri par comptage

## dénombrement

- Cardinal d'un ensemble : définition, cardinal d'un sous-ensemble, lien avec les ensembles de départ et d'arrivée des applications injectives, surjectives, bijectives (cas particulier d'une application ayant un ensemble de départ et d'arrivée de même cardinal).
- Cardinal d'une union : disjointe de deux ensembles, disjointe de  $n$  ensembles, union quelconque de deux ensembles.
- Cardinal d'un produit cartésien.
- $p$ -liste sans répétition : définition, nombre de  $p$ -listes sans répétition d'un ensemble à  $n$  éléments.
- permutations : définition, nombre de permutations d'un ensemble.
- combinaisons : définition, nombre de  $p$ -combinaisons d'un ensemble à  $n$  éléments.
- cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble  $E$  fini.

## Espaces vectoriels

- Espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$  : vecteurs, scalaires, addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire.
- Propriétés : Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\vec{u} \in \mathbb{K}^n$ . Alors
  - $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$
  - $\lambda \cdot \vec{0}_{\mathbb{K}^n} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$
  - $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{K}^n})$
- Combinaison linéaire de vecteurs.
- Sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  : partie de  $\mathbb{K}^n$  contenant le vecteur nul et stable par combinaison linéaire.
- Intersection de deux sous-espaces vectoriels ([démonstration exigible](#))
- Notation  $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  où  $\vec{u}_1, \vec{u}_p$  sont des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  : ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ . C'est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  appelé le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  engendré par les vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ .
- Différentes écritures d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  :
  - Ecriture cartésienne :  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ .
  - Ecriture paramétrée :  $A = \{(x, x, -2x), x \in \mathbb{R}\}$ .
  - Ecriture sous forme d'un sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :  $A = \text{vect}((1, 1, -2))$ .
- Famille génératrice : définition,
- Famille liée, libre : définitions, propriétés, caractérisation des familles libres :
 
$$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \text{ libre} \iff (\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p = \vec{0}_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0)$$
- Bases : définition, unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base ([démonstration exigible](#)), dimension.
- Liens entre famille génératrice, libre et base :  
Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  de dimension  $p$ .

- Toute famille libre de  $E$  a au plus  $p$  éléments.
- Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $p$  éléments.

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  de dimension  $p$ .

- Une famille libre ayant  $p$  éléments de  $E$  est une base de  $E$ .
- Une famille génératrice ayant  $p$  éléments de  $E$  est une base de  $E$ .
- De toute famille génératrice de  $E$ , on peut extraire une base de  $E$ .

⇒ propriétés des dimensions :

Si  $E$  et  $F$  sont deux sous espaces vectoriels de  $\mathbb{K}^n$  tels que  $E \subset F$  et  $\dim(E) = \dim(F)$  alors  $E = F$ .

- ⇒ Dans  $\mathbb{K}^2$ , toute famille de deux vecteurs orthogonaux non nuls est une base de  $\mathbb{K}^2$ , résultat analogue dans  $\mathbb{K}^3$ .
- ⇒ Rang d'une famille de vecteur : définition  $Rg(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = \dim(\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p))$ , détermination pratique par extraction d'une base ou en calculant le rang de la matrice associée à la famille de vecteurs, utilisation du rang pour prouver qu'une famille est libre, génératrice, ou base.

### Probabilités

- ⇒ Définitions : univers, évènements, évènements élémentaires, évènement certain, évènement impossible, évènements incompatibles, **système complet d'évènements**, espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .
- ⇒ Probabilité : définition, propriétés ( $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,  $P(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$  pour des évènements deux à deux incompatibles), espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ .
- ⇒ Une probabilité est entièrement définie par sa valeur sur les évènements élémentaires.
- ⇒ Probabilité uniforme.
- ⇒ Probabilité conditionnelle : définition, propriété : si  $P(A) \neq 0$  alors  $P_A$  est une probabilité ([démonstration exigible](#)).
- ⇒ Formules des probabilités composées (simple et généralisée). ([démonstration exigible uniquement pour la simple](#)),
- ⇒ Formule des probabilités totales. ([démonstration exigible](#)),
- ⇒ Formule de Bayes. ([démonstration exigible](#)),
- ⇒ Indépendance et indépendance mutuelle.

### Suites réelles

- ⇒ Suite majorée, minorée, bornée, (strictement) croissante/décroissante, (strictement) monotone, constante, stationnaire.
- ⇒ Définition d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite  $\ell$  :  
 $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$
- ⇒ Unicité de la limite d'une suite convergente, toute suite convergente est bornée (réciproque fausse)
- ⇒ Suite divergente : définition.
- ⇒ Limites des suites usuelles, opérations sur les limites, croissances comparées.
- ⇒ Théorème de composition des limites : si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $\ell$  et si  $f$  admet une limite  $L$  en  $\ell$ , alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $L$ .
- ⇒ Si une suite est convergente vers une limite  $l > 0$ , alors à partir d'un certain rang les termes de la suites sont tous strictement positifs.
- ⇒ Théorème de passage à la limite dans une inégalité, théorèmes de comparaison, théorème des glandes.

### Remarques aux colleurs

— Merci aussi de poser une petite question d'informatique (cf Annexe).

## Exemples de programmes informatiques

**Exercice 1**

Ecrire en Python une fonction `existence` qui prend en entrée une liste  $L$  et un nombre  $element$  et renvoie `True` si  $element$  se trouve dans la liste  $L$ , `False` sinon.

```
def existence(L,element):
    n=len(L) # taille de la liste
    for i in range(n):
        if L[i]==element:
            return True
    return False # si on n' a pas trouvé element après avoir parcouru toute la liste
```

**Exercice 2**

Ecrire en Python une fonction `MaximumListe` qui prend en entrée une liste  $L$  et renvoie la plus grande valeur de cette liste

```
def MaximumListe(L):
    n=len(L) #taille de la liste
    maxi=L[0] #on considère temporairement que le max est le premier élément
    for i in range(n):
        if L[i]>maxi:
            maxi=L[i] #on a trouvé une plus grande valeur
    return maxi
```

**Exercice 3**

Ecrire en Python une fonction `Somme` qui prend en entrée une liste  $L$  et renvoie la somme de ses éléments :

```
def Somme(L):
    n=len(L) #taille de la liste
    S=0 #initialisation de la somme
    for i in range(n):
        S=S+L[i]
    return S
```

**Exercice 4**

Ecrire une fonction `experience` qui prend en paramètre un entier  $n$  et simule  $n$  lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée en renvoyant une liste aléatoire composée de  $n$  valeurs égales à 0 ou 1. On considérera que 0 correspond à Face et 1 à Pile.

```
from random import * # bibliothèque nécessaire pour créer des nombres aléatoires
def experience(n):
    L=[] #liste vide initialement
    for i in range(n):
        L.append(randint(0,1)) # 0 ou 1 choisi de manière aléatoire
    return L
```