

Devoir Maison 1 - Première partie

correction

Problème 1 : Calcul

On considère les deux réels suivants :

$$\nu = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \text{ et } \mu = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de ν et μ .

1. (a) Calculer $\nu\mu$ et $\nu^3 + \mu^3$.

D'après les propriétés de la racine cubique, on a :

$$\begin{aligned} \nu\mu &= \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[3]{(26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3})} \\ &= \sqrt[3]{26^2 - (15\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt[3]{676 - 675} \\ &= \sqrt[3]{1} \\ &= 1 \text{ (car } 1^3 = 1). \end{aligned}$$

Et

$$\nu^3 + \mu^3 = \left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right)^3 = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52.$$

Donc $\boxed{\nu\mu = 1 \quad \text{et} \quad \nu^3 + \mu^3 = 52}.$

- (b) Développer $(\nu + \mu)^3$ et simplifier l'expression grâce à la question précédente.

$$\begin{aligned} (\nu + \mu)^3 &= (\nu + \mu)^2(\nu + \mu) \\ &= (\nu^2 + 2\nu\mu + \mu^2)(\nu + \mu) \\ &= \nu^3 + 2\nu^2\mu + \nu\mu^2 + \nu^2\mu + 2\nu\mu^2 + \mu^3 \\ &= \nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu\mu^2 + \mu^3 \\ &= \nu^3 + \mu^3 + 3\nu\mu(\nu + \mu) \end{aligned}$$

$$\boxed{(\nu + \mu)^3 = 52 + 3(\nu + \mu)}$$

2. On pose $\lambda = \nu + \mu$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 3x - 52$.

- (a) Dédire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.

D'après la question précédente, $\lambda^3 = 52 + 3\lambda \iff \lambda^3 - 3\lambda - 52 = 0 \iff \boxed{P(\lambda) = 0}.$

- (b) Vérifier que $P(4) = 0$ (on dit que 4 est racine évidente) puis trouver trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c).$$

On a $\boxed{P(4) = 4^3 - 3 \times 4 - 52 = 64 - 12 - 52 = 0}.$

On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - 4)(ax^2 + bx + c) = x^3 - 3x - 52$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(x - 4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 4ax^2 - 4bx - 4c = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (c - 4b)x - 4c.$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = 1 & (1) \\ b - 4a = 0 & (2) \\ c - 4b = -3 & (3) \\ -4c = -52 & (4) \end{cases}$$

Après résolution, on trouve

$$\begin{cases} a = 1 & (5) \\ b = 4 & (6) \\ c = 13 & (7) \\ c = 13 & (8) \end{cases}$$

On obtient $\boxed{(x - 4)(x^2 + 4x + 13) = x^3 - 3x - 52}$.

(c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de λ .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff (x - 4)(x^2 + 4x + 13) \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x^2 + 4x + 13 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation polynomiale du second degré de discriminant $-36 < 0$. Donc l'unique solution est 4.

Comme λ est racine de P , on trouve $\boxed{\lambda = 4}$.

3. On pose, pour tout réel x , $Q(x) = (x - \nu)(x - \mu)$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - \nu)(x - \mu) \\ &= x^2 - (\nu + \mu)x + \nu\mu \\ &= x^2 - \lambda x + \nu\mu \end{aligned}$$

$$\boxed{Q(x) = x^2 - 4x + 1} \text{ en utilisant les résultats des questions précédentes}$$

(b) En déduire que ν et μ sont solutions de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 = 0 &\iff Q(x) = 0 \\ &\iff (x - \nu)(x - \mu) = 0 \\ &\iff x - \nu = 0 \text{ ou } x - \mu = 0 \\ &\iff x = \nu \text{ ou } x = \mu \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\boxed{\nu \text{ et } \mu \text{ sont les solutions de l'équation } x^2 - 4x + 1 = 0}$.

4. Conclure.

L'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est égal à $12 > 0$. Cette équation a deux solutions $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.

Comme $\nu > \mu$, on trouve que $\nu = 2 + \sqrt{3}$ et $\mu = 2 - \sqrt{3}$.

On a montré que $\boxed{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \text{ et } \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}}$.