

Devoir Maison 1 - Première partie

- ★ Soignez la présentation.
- ★ Chaque conclusion doit être encadrée !
- ★ Soyez précis dans votre rédaction, c'est fondamental de travailler ce point dès l'entrée en classe préparatoire.
- ★ Les devoirs maison ont pour objectif de vous entraîner et ne sont pas notés. Faire appel à une intelligence artificielle dans ce cadre est une ineptie.

Problème 1 : Calcul

On considère les deux réels suivants :

$$\nu = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \text{ et } \mu = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de ν et μ .

1. (a) Calculer $\nu\mu$ et $\nu^3 + \mu^3$.
(b) Développer $(\nu + \mu)^3$ et simplifier l'expression grâce à la question précédente.
2. On pose $\lambda = \nu + \mu$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 3x - 52$.
(a) Dédire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
(b) Vérifier que $P(4) = 0$ (on dit que 4 est racine évidente) puis trouver trois réels a , b et c tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c).$$

(c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de λ .
3. On pose, pour tout réel x , $Q(x) = (x - \nu)(x - \mu)$.
(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.
(b) En déduire que ν et μ sont solutions de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.