

Exercice n° 1:

Traduire les propositions suivantes à l'aide des opérateurs mathématiques (ET, OU, NON, $\implies$, $\iff$) puis indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1. Les pâquerettes sont des fleurs ou les singes sont des arbres.
2. Il suffit d'avoir du chocolat pour faire de la mousse au chocolat.
3. Une condition nécessaire pour obtenir son concours est de réussir les épreuves écrites.
4. Les poules ont deux pattes et les épinards sont roses.
5. Pour qu'il pleuve, il faut qu'il y ait des nuages.
6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit un rectangle est qu'il ait un angle droit.
7. Si Napoléon était chinois alors $1+1=3$.
8. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.
9. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit différent de 2.
10. L'Homme est un quadrupède et il parle.
11. Les poiriers ne donnent pas des fraises.
12. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.

Exercice n° 2:

Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. La fonction f est constante et vaut -1 sur $[0, 1]$.
2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ s'annule une seule fois.
3. L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B .
4. Tout réel a un carré positif ou nul.
5. Pour tout réel positif x , il existe un unique entier naturel n tel que $n \leq x < n + 1$.

Exercice n° 3:

Donner la négation des propositions suivantes.

1. Quel que soit le jour de la semaine, Zorro monte à cheval.
2. $1 \leq x < y$.
3. $x = 0$ ou $y = 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
5. Tout être humain est mortel.
6. Il existe au moins un chien qui ne s'appelle pas Dingo.
7. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
8. $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.
9. $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 2$.

Exercice n° 4:

Compléter avec $\in, \notin, \subset$ ou $\not\subset$.

$\mathbb{N} \dots \mathbb{R}$	$\frac{2}{3} \dots \mathbb{R}$	$]0, 7] \dots \mathbb{R}$	$\sqrt{3} \dots \mathbb{Q}$	$[2, 3] \dots [0, 5]$	$\{1, 2, 4\} \dots \{0, 2, 4\}$	$2 \dots \{0, 2, 4\}$
$\{-1, 1\} \dots \mathbb{N}$	$(3, \pi) \dots \mathbb{R}^2$	$(3, \frac{1}{2}) \dots \mathbb{N} \times \mathbb{R}$	$(\frac{1}{2}, 3) \dots \mathbb{N} \times \mathbb{R}$	$(4, 1, 9) \dots \mathbb{N}^3$	$\{-1, 1\} \dots \{-1, 0, 1\}$	$\pi \dots \mathbb{R}$

Exercice n° 5:

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{n}, p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, \text{ avec } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 4\}$

1. Ecrire A en extension.
2. Ecrire B en extension et donner $\mathcal{P}(B)$.

Exercice n° 6:

Soit $A = [-1, 1], B = \left]0, \frac{5}{2}\right[$ et $C = \{0, 1, 2\}$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $A \cup B, A \cup C, B \cup C$.
2. Déterminer $A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$.
3. Déterminer $\overline{A}, \overline{B}$.
4. Déterminer $\overline{A} \cup B, \overline{B} \cap C$.

Exercice n° 7:

Simplifier les expressions suivantes où X et Y sont deux sous-ensembles de E .

$$X \cup \emptyset \quad X \cap \emptyset \quad (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \quad (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$$

Exercice n° 8:

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}; x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$.
2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3), t \in \mathbb{R}\}$. Prouver que $A = B$.

Exercice n° 9:

Donner la contraposée des propositions suivantes.

1. Si un polygone a trois côtés alors c'est un triangle.
2. $x \geq 1 \implies f(x) \geq 0$.
3. $a \in A \implies a \leq 1$.
4. $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.
5. S'il fait froid alors les touristes n'achètent pas de glaces.

Exercice n° 10:

En utilisant les différentes techniques de démonstration, répondre aux questions suivantes.

1. Montrer que si $x < 1$ alors $(x - 4)^2 + 3 > 12$.
2. Soient deux réels a et b . Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \iff (a = b = 0).$$

3. Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'un de ces nombres est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.
4. Montrer que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
5. Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$?

Exercice n° 11:

Rédiger les démonstrations par récurrence (simple ou double) suivantes.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n , $13^n - 4^n$ est divisible par 9.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.
7. Montrer que pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice n° 12:

Expliciter la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

Je me perfectionne!

Exercice n° 13:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq n^2$.

Exercice n° 14:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n)$.
Montrer à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n$.

Indication : On pourra utiliser que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice n° 15:

Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Pour l'existence, on utilisera une récurrence forte sur l'hypothèse :

$$\mathcal{P}(n) : \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1).$$

Exercice n° 16:

Soit E un ensemble et A, B, C des sous ensembles de E .

1. Prouver que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.
2. Prouver que Si $A \cup B = B \cap C$ alors $A \subset B \subset C$

Exercice n° 17:

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ et tout nombre réel x non nul et strictement supérieur à -1 , on a : $(1+x)^n > 1 + nx$.

Exercice n° 18:

Montrer que pour tout entier n , on a n impair $\iff n^2$ impair.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 19:

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Simplifier au maximum les ensembles X et Y suivants :

$$X = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \quad \text{et} \quad Y = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

2. Montrer l'équivalence $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$.
3. En raisonnant par double inclusion, montrer que les ensembles A et B suivants sont égaux :

$$A = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ multiple de 4 et de 6}\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ multiple de 12}\}$$

Exercice n° 20: L'algorithme de Babylone

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Préciser les limites de f en 0 et $+\infty$ et montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote oblique Δ . *La méthode de recherche des asymptotes obliques sera étudiée plus tard dans l'année.*

Partie B : Approximation de $\sqrt{2}$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de ce problème est de montrer que la suite ainsi définie converge *très rapidement* vers $\sqrt{2}$.

On pourra utiliser par la suite le fait que $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 (mettre les résultats sous forme fractionnaire).
(b) Montrer par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

En déduire le sens de la variation ainsi que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} (u_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

- (b) Vérifier que $|u_0 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$ puis établir par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}-1}$$

- (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.