Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1: Un peu de calcul

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

(a) $\dfrac{248}{1024}$

(b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

(c) $2-\dfrac{13}{7}+\left(1+\dfrac{5}{2}\right)$

(d) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+3\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{6}\right)$

(e) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)\times\left(3+\frac{7}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)}$

(f) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}}$

(g) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}$.

2. Simplifier l'écriture des nombres suivants (les nombres a et $b$sont non nuls) :

(a) $(a^3)^2\times a^{-4}$

(b) $a^2b^{-3}(ab)^4$

(c) $2^{23}\times 0,5^{24}$

(d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

(e) $\dfrac{a^3b^{-2}}{a^4b^{-3}}$

(f) $\dfrac{8^{73}\times 3^{-31}}{9^{15}\times 2^{220}}$

(g) $\dfrac{(3^5\times 2^{-2})^2}{(9^{-1}\times 2^3)^3}$.

(h) $\dfrac{9^3\times 27^2\times 75}{5^2\times 3^4}$.

(i) $\dfrac{7^3\times 10^{-3}\times 0,6^2}{12^2\times 10^4\times 5}$

(j) $\dfrac{0,03\times 5^3\times 10^4}{6\times 50^2\times 10^3}$

(k) $(7^3)^2+49^3$

(l) $\dfrac{3^5\times 81}{9^{-3}}$

(m) $81^5\times(3^{-2})^{-5}\times\dfrac{1}{9}$

(n) $\dfrac{4^{-2}\times 8^3}{16^3}$.

3. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

(a) $\sqrt{12}$

(b) $\sqrt{27}$

(c) $\sqrt{48}$

(d) $\sqrt{98}$

(e) $\sqrt{242}$

(f) $5\sqrt{27}-2\sqrt{48}$

(g) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\sqrt{\dfrac{98}{25}}$

(h) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

(i) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}-1}$

4. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants (lorsque cela est possible) :

(a) $0,1^5\times(-0,001^2)\times 0,01^2$

(b) $\dfrac{9\times 14\times 11^2}{15\times 21\times 22}$.

(c) $0,005\,94$

(d) $124\,000\,000$

(e) $\dfrac{63}{1920}$

(f) $\dfrac{49}{21}$.

(g) $35\times 10^6+3\times 10^6+2,9\times 10^6$.

(h) $-9\times 10^{-8}-4,2\times 10^{-8}+9,4\times 10^{-8}$.

(i) $-0,8\times 10^7+0,05\times 10^7+2,32\times 10^7$.

Exercice n° 2: Simplifier ou calculer les expressions suivantes

1. $A=\dfrac{14b^4x}{15a^2x}\cdot\dfrac{5ay}{7b^3y}$

2. $B=\dfrac{2x^3-4x^2+2x}{6x^2-6}$

3. $C=\dfrac{\frac{x^2+2x-15}{x^2-6x+9}}{\frac{x+5}{x^2+x}}$

4. $D=\dfrac{2x+5}{x^2+5x-36x}-\dfrac{1}{x-4}$

5. $E=\dfrac{21a^2b+7a^3b^2}{7a^3b^2}$

6. $F=\dfrac{2x^2+4x}{x+2}$

7. $G=\dfrac{x^2+x}{2x}$

8. $H=\dfrac{4\sqrt{3}+10\sqrt{2}}{2}-\sqrt{12}+\sqrt{32}-\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

Exercice n° 3:

1. Préciser à quel intervalle ou à quelle réunion d'intervalles, appartient le nombre x lorsque x satisfait aux conditions indiquées.

(a) $-5\leq x\leq -\dfrac{3}{2}$ **et** $x\geq -\dfrac{13}{8}$

(b) $x\leq\dfrac{2}{3}$ **et** $x\geq\dfrac{3}{4}$

(c) $x<-2$ **ou** $x>-2$

(d) $x\leq -\dfrac{1}{2}$ **ou** $x\geq -\dfrac{1}{2}$

2. Préciser si l'ensemble A est un intervalle et si oui, préciser cet intervalle.
   (a) $A = [-2; 3[\cup]1; 5]$
   (b) $A = [-2; 3[\cap]1; 5]$
   (c) $A = [-5; +\infty[\cup] - \infty; 7]$
   (d) $A = [-5; +\infty[\cap] - \infty; 7]$
   (e) $A =] - \infty; 2] \cap [3; 4]$
   (f) $A =] - \infty; 2] \cup [3; 4]$

Exercice n° 4: Factoriser les expressions suivantes

1. $A = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x+4}} - (\sqrt{3x+3})^3$.
2. $B = \sqrt{9(x-1)} - 2\sqrt{x-1}$
3. $C = (2x^2-1)^2 - (2x^2+x)^2$
4. $D = 4(x^2+x+2)^2 - (2x^2-1)^2$
5. $E = 2(x^2+3)^2 - (3+\sqrt{2}x^2)^2$
6. $F = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - 1$
7. $G = 3\dfrac{(x+1)^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1)^2} - 4$
8. $I = \dfrac{(8x+4)(4x+2)}{2}$

Exercice n° 5: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $6x+1 = -x+4$
2. $-\dfrac{1}{4}x + 1 \geqslant \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{2}$
3. $(2x+1)(5-x) = (x-5)(x+1)$
4. $\dfrac{2x+3}{7} \leq \dfrac{1}{5}x - 2$

Exercice n° 6: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x| = -2$
3. $|2x+4| = 0$
4. $|-2x+1| = 1$
5. $|4x+1| = |2x-3|$
6. $|x| < -3$
7. $|x| < 5$
8. $|-x| \geqslant 7$
9. $|x+1| < 2$
10. $|-2x-5| > 1$

Exercice n° 7: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $x^2 - 4x + 2 \leq 0$
2. $x^2 - 3x + 2 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 1$
4. $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$
5. $-2x^2 + 7x - 5 = 0$
6. $(x^2+2x+1)^2 < 16$
7. $\dfrac{x^2+10x+25}{-2x^2-7x-3} \leqslant 0$
8. $\dfrac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1$
9. $\dfrac{x}{x-2} \leqslant \dfrac{6}{x-1}$
10. $x + \dfrac{2}{x} \leqslant 4$

Exercice n° 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
2. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
3. $8x - 18\sqrt{x} - 11 \geqslant 0$

Exercice n° 9:

Les ensembles suivants possèdent-ils une borne supérieure ? une borne inférieure ? un plus grand élément ? un plus petit élément ?

1. $[0,1] \cup \{2\}$
2. $\mathbb{Z}$
3. $]3,4]$
4. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 - 1 > 0\}$
5. $\{x \in \mathbb{R}_+\,;\, x^2 - 1 > 0\}$
6. $\left\{x \in \mathbb{R}\,;\, \exists\, y \in \mathbb{R}^*,\ x = \dfrac{1}{y}\right\}$

Exercice n° 10:

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

1. Montrer que l'ensemble A est borné.
2. Justifier l'existence des bornes inférieure et supérieure de l'ensemble A et donner leur valeur.
3. L'ensemble A possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice n° 11:

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} 7x-5y=4 \\ 3x=y+2 \end{cases}$
2. $(S_2)\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 2x-7y=0 \end{cases}$
3. $(S_3)\begin{cases} 2x-5y=5 \\ -4x+10y=1 \end{cases}$
4. $(S_4)\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=4 \end{cases}$
5. $(S_5)\begin{cases} a=1 \\ a+b+c=1 \\ b+c=0 \end{cases}$
6. $(S_6)\begin{cases} a+b=2 \\ b+c=1 \\ a-2c=4 \end{cases}$

Je me perfectionne !

Exercice n° 12:

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

Exercice n° 13:

Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la partie entière de $\dfrac{n^3}{n+1}$

Exercice n° 14:

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que

$$0\leq\lfloor nx\rfloor-n\lfloor x\rfloor\leq n-1$$

Exercice n° 15: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\sqrt{x+2}=x-4$
2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{5}$
3. $\sqrt{x^2-x-2}=3x+2$
4. $\sqrt{x+1}<2x-3$
5. $\sqrt{x^2-x-20}\geqslant x$
6. $\sqrt{x+1}\leqslant\sqrt{4x-1}$
7. $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x^2+1}>0$

Exercice n° 16: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1. $|2x+3|-x-2=|2x-1|$
2. $|2x-3|<|3x+5|$
3. $\sqrt{(3x+5)^2}=x+1$
4. $|2x-1|-1=|x+3|$
5. $|\dfrac{x-2}{x+3}|>1$
6. $|x^2-3x+2|\leq|2x^2-2|$

Exercice n° 17: Avec un paramètre....

Soit m un nombre réel. Résoudre, en fonction du paramètre m, les équations et inéquations suivantes :

1. $3mx^2-(m^2+9)x+3m=0$
2. $x^2+2mx+1=0$
3. $\mathrm{e}^x+m\mathrm{e}^{-x}-m-1=0$

Exercice n° 18:

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$
2. En déduire $\left\lfloor 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right\rfloor$.