

TD01 – Correction

Exercice 1:

- (Les pâquerettes sont des fleurs) OU (Les singes sont des arbres).
On a (Vrai) ou (Faux) qui donne **VRAI**
- (Avoir du chocolat) $\Rightarrow$ (On peut faire une mousse au chocolat).
FAUX. Ce n'est pas suffisant, on a besoin d'autres ingrédients.
- (Obtenir son concours) $\Rightarrow$ (Réussir les épreuves écrites).
VRAI. Quand on obtient son concours, c'est qu'on a réussi les épreuves écrites et orales.
- (Les poules ont deux pattes) ET (les épinards sont roses)
On a (Vrai) ET (Faux). On obtient **FAUX**
- (Il pleut) $\Rightarrow$ (Il y a des nuages).
VRAI
- (Un quadrilatère est un rectangle) $\Leftrightarrow$ (Il a un angle droit).
FAUX. Seule l'implication $\Rightarrow$ est vraie.
- (Napoléon est chinois) $\Rightarrow$ ($1+1=3$).
On a Faux $\Rightarrow$ Faux donc on obtient **VRAI** pour l'implication.
(rappel : une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie sauf si P vraie avec Q fausse)
- soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 4 \Rightarrow x > 3$. **VRAI**
- soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 3 \Rightarrow x \neq 2$. **VRAI**
- (L'Homme est un quadripède) ET (il parle).
On a (Faux) ET (Vrai). On obtient donc **FAUX**
- NON(Les poiriers donnent des fraises).
On a NON(Faux) donc **VRAI**.
- soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.
FAUX. On peut aussi avoir $x < -2$.

Exercice 2:

- $\forall x \in [0, 1], f(x) = -1$.
- $\exists! a \in \mathbb{R}, g(a) = 0$.
- $\forall x \in A, x \in B$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! n \in \mathbb{N}, n \leq x < n + 1$.

Exercice 3:

- Il existe au moins un jour de la semaine où Zorro ne monte pas à cheval.
- La proposition correspond à ($1 \leq x$) ET ($x < y$). Sa négation est donc :
($x < 1$) OU ($x \geq y$).
- ($x \neq 0$) et ($y \neq 0$).
- $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$.
- Il existe au moins un humain immortel.
- Tous les chiens s'appellent Dingo.
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$.
- $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$.
- Se rappeler que $P \Rightarrow Q$ correspond à $\text{non}(P)$ ou Q . La négation de la proposition est donc :
 $\exists x \in E, P$ ET $\text{non}(Q)$.

10. $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1$ ET $|f(x)| > 2$.

Exercice 4:

On obtient :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	$\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$	$]0, 7] \subset \mathbb{R}$	$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$	$[2, 3] \subset [0, 5]$	$\{1, 2, 4\} \not\subset \{0, 2, 4\}$	$2 \in \{0, 2, 4\}$
$\{-1, 1\} \not\subset \mathbb{N}$	$(3, \pi) \in \mathbb{R}^2$	$(3, \frac{1}{2}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$	$(\frac{1}{2}, 3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{R}$	$(4, 1, 9) \in \mathbb{N}^3$	$\{-1, 1\} \subset \{-1, 0, 1\}$	$\pi \in \mathbb{R}$

Exercice 5:

1. On cherche toutes les fractions $\frac{p}{n}, p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq p \leq 2n \leq 7$.

On a donc $n \in \{1, 2, 3\}$

— Si $n = 1 : p \in \{1, 2\}$

— Si $n = 2 : p \in \{1, 2, 3, 4\}$

— Si $n = 3 : p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Finalement, en regroupant toutes les possibilités, on obtient

$$A = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Ainsi $B = \{-2, 2\}$ et $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{-2\}, \{2\}, B\}$

Exercice 6:

- $A \cup B = [-1, \frac{5}{2}[$, $A \cup C = [-1, 1] \cup \{2\}$, $B \cup C = [0, \frac{5}{2}[$
- $A \cap B =]0, 1]$, $A \cap C = \{0, 1\}$, $B \cap C = \{1, 2\}$, $A \cap B \cap C = \{1\}$
- $\bar{A} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $\bar{B} =]-\infty, 0] \cup [\frac{5}{2}, +\infty[$.
- $\bar{A} \cup B =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $\bar{B} \cap C = \{0\}$.

Exercice 7:

$$X \cup \emptyset = X \quad X \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) = X \cap (Y \cup \bar{Y}) = X \cap E = X$$

$$(X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) = X \cup (Y \cap \bar{Y}) = X \cup \emptyset = X$$

Exercice 8:

1. Soit $a \in \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 4x - 2\}$ Montrons que $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\text{On a } a^2 = 4a - 2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 2 = 0.$$

$$\text{On obtient 2 racines } a_1 = 2 - \sqrt{2} \text{ et } a_2 = 2 + \sqrt{2}.$$

Dans les deux cas, ces valeurs sont dans $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Ainsi } \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$$

2. Procédons par double inclusion.

★ Montrons que $B \subset A$:

$$\text{Soit } (x, y) \in B, \text{ alors } \exists t \in \mathbb{R}, (x, y) = (t + 1, 4t + 3)$$

$$\text{Ainsi } 4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 1 \text{ donc } (x, y) \in A.$$

$$\text{Donc } B \subset A$$

★ Montrons que $A \subset B$.

$$\text{Soit } (x, y) \in A \text{ alors } 4x - y = 1 \Leftrightarrow y = 4x - 1.$$

$$\text{Ainsi } (x, y) = (x, 4x - 1).$$

$$\text{En posant } t = x - 1, \text{ on a } (x, y) = (t + 1, 4(t + 1) - 1) = (t + 1, 4t + 3) \in B$$

$$\text{Donc } A \subset B$$

$$\text{Finalement par double inclusion, } A = B$$

Exercice 9:

- Si un polygone n'est pas un triangle alors il n'a pas trois côtés.
- $f(x) < 0 \Rightarrow x < 1$

3. $a > 1 \Rightarrow a \notin A$
4. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
5. Si les touristes achètent des glaces alors il ne fait pas froid.

Exercice 10:

En utilisant les différentes techniques de démonstration, répondre aux questions suivantes.

1. Soit x un réel tel que $x < 1$. Alors $x - 4 < -3$.
Ainsi, $(x - 4)^2 > 9$ car la fonction carrée est décroissante sur $] -\infty ; 0]$.
D'où, $(x - 4)^2 + 3 > 12$.
2. On raisonne par double implication.
($\Rightarrow$) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0$.
Alors en particulier, pour $n = 0$, $a \times 2^0 + b \times 3^0 = 0 \iff a + b = 0$
Et pour $n = 1$, $a \times 2^1 + b \times 3^1 = 0 \iff 2a + 3b = 0$.
On a donc
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ -2b + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

On a donc montré que $(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \implies (a = b = 0)$.
($\Leftarrow$) On suppose que $a = b = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $a \times 2^n + b \times 3^n = 0 \times 2^n + 0 \times 3^n = 0 + 0 = 0$.
On a donc montré que $(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \Leftarrow (a = b = 0)$.
Conclusion : On a $(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \iff (a = b = 0)$.
3. Soient a, b, c trois nombres réels. Supposons par l'absurde que $a + b + c = 1$ et $a < \frac{1}{3}$, $b < \frac{1}{3}$ et $c < \frac{1}{3}$.
Alors $a + b + c < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \iff a + b + c < 1$, ce qui est absurde.
Donc $a \geq \frac{1}{3}$ ou $b \geq \frac{1}{3}$ ou $c \geq \frac{1}{3}$.
Autrement dit,

si a, b et c sont 3 réels tels que $a + b + c = 1$, alors l'un de ces nombres est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.
4. On raisonne par contraposition. On va montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
Ainsi, $n^2 - 1 = (2p + 1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p + 1 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p + 1)$.
Or, en raisonnant par disjonction de cas (exemple vu en cours), on peut montrer que $p(p + 1)$ est un nombre pair. Donc il existe un entier k tel que $p(p + 1) = 2k$.
D'où, $n^2 - 1 = 4 \times 2k = 8k$.
On en déduit que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
Conclusion :

si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
5. Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$?

Non, pour $x = -1$, $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$. (C'est même faux pour tous les nombres strictement négatifs.)

Exercice 11:

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n = 1 + 2 \times 5^n$.
Initialisation : Pour $n = 0$: on a $1 + 2 \times 5^0 = 1 + 2 = 3 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 1 + 2 \times 5^{n+1}$.
Par définition de la suite, $u_{n+1} = 5u_n - 4$.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.
Donc $u_{n+1} = 5(1 + 2 \times 5^n) - 4 = 5 + 2 \times 5^{n+1} - 4 = 1 + 2 \times 5^{n+1}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout n entier naturel.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n \leq 1$.

Initialisation : $u_0 = 0 \leq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons donc que $u_{n+1} \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence ,

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 &\iff 3u_n \leq 3 \\ &\iff 3u_n - 1 \leq 2 \\ &\iff \frac{3u_n - 1}{2} \leq 1 \\ &\iff u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

Initialisation : $\frac{1}{2^0} - 2 \times 0 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons donc que $u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2(n+1) + 1 = \frac{1}{2^{n+1}} - 2n - 1$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2} \quad \text{par définition de la suite} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - 2n + 1 \right) - \frac{2n+3}{2} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - n + \frac{1}{2} - n - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 2n - 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : 0 < u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1+2u_0}{2+u_0} = \frac{1}{2}$. Donc $0 < u_1 \leq 1$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 < u_{n+1} \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $1 + 2u_n > 0$ et $2 + u_n > 0$. Par quotient, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n} > 0$.

D'autre part, $u_{n+1} - 1 = \frac{1+2u_n}{2+u_n} - 1 = \frac{1+2u_n-2-u_n}{2+u_n} = \frac{u_n-1}{2+u_n} \leq 0$.

En effet, par hypothèse de récurrence, $u_n \leq 1$ donc $u_n - 1 \leq 0$ et $u_n > 0$ donc $2 + u_n > 0$. Donc par quotient, $\frac{u_n-1}{2+u_n} \leq 0$.

Ainsi, $u_{n+1} \leq 1$.

D'où $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout n entier naturel non nul.

5. Montrons par récurrence simple que pour tout entier naturel n , $13^n - 4^n$ est divisible par 9. On notera P_n la propriété au rang n .

Initialisation pour $n = 0$:

$13^0 - 4^0 = 0 = 9 \times 0$ donc P_0 est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n = 9p$.

Montrons que la propriété reste vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $\exists q \in \mathbb{N}$, $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9q$.

On a $13^{n+1} - 4^{n+1} = (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n = 9 \times 13^n + 4 \times 13^n - 4 \times 4^n = 9 \times 13^n + 4(13^n - 4^n)$

Soit d'après l'hypothèse de récurrence : $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9 \times 13^n + 4 \times 9p = 9 \times (13^n + 4p)$

Il suffit donc de poser $q = 13^n + 4p$.

On a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est donc vraie pour tout n entier naturel.

6. Il s'agit ici d'une récurrence double.

Montrons à l'aide d'une récurrence double que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$. On notera P_n la propriété au rang n .

Initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$:

On a $u_0 = u_1 = 3$.

Par ailleurs $2^{0+1} + (-1)^0 = 3$ et $2^{1+1} + (-1)^1 = 3$

Donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$, c'est à dire que :

$$u_n = 2^{n+1} + (-1)^n \text{ et } u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}.$$

Montrons que la propriété reste vraie au rang $n + 2$, c'est à dire que $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$

$$\text{d'où } u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n = 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n)$$

$$\text{soit } u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^n(-1 + 2)$$

$$\text{soit encore } u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$$

On a P_n et $P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$

D'après le principe de récurrence double la propriété P_n est donc vraie pour tout n entier naturel.

7. Montrons par récurrence simple que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On notera P_n la propriété au rang n .

Initialisation pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 \text{ et } \frac{0 \times (0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0 \text{ donc } P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose la propriété P_n vraie, c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Montrons que la propriété P_{n+1} reste vraie, c'est à dire que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence, } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{soit } \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\text{soit } \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est donc vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 12:

On commence par établir une conjecture.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4$$

$$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9$$

$$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16$$

On remarque que tous les termes sont des carrés d'entiers. Plus précisément, on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n = (n+1)^2$

Initialisation : $(0 + 1)^2 = 1 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = (n + 2)^2$.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2n + 3$ par hypothèse de récurrence.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n .

Je me perfectionne!

Exercice 13:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: $1 \leq u_n \leq n^2$. Montrons la propriété par récurrence sur n .

Initialisation : On a $u_1 = 1$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $u_2 = u_1 + \frac{2}{2}u_0 = 1 + 1 = 2$ donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie. On va donc montrer que $1 \leq u_{n+2} \leq (n + 2)^2$.

Par définition, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ donc $u_{n+2} \geq 1 + \frac{2}{n+2} \times 1 \geq 1$.

D'autre part, par hypothèse de récurrence, $u_n \leq n^2$ et $u_{n+1} \leq (n + 1)^2$.

Ainsi, $u_{n+2} \leq (n + 1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2$.

Or,

$$\begin{aligned} (n + 2)^2 - (n + 1)^2 - \frac{2}{n+2}n^2 &= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - \frac{2}{n+2}n^2 \\ &= 2n + 3 - \frac{2}{n+2}n^2 \\ &= \frac{(2n + 3)(n + 2) - 2n^2}{n + 2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2}{n + 2} \\ &= \frac{7n + 6}{n + 2} > 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+2} \leq (n + 2)^2$ et $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 14:

Il s'agit d'une récurrence forte.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout entier naturel n , $u_n = 3n$. On notera P_n la propriété au rang n .

Initialisation pour $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $3 \times 0 = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n , c'est à dire que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k = 3k$.

Montrons que la propriété reste vraie au rang $n + 1$, c'est à dire que $u_{n+1} = 3(n + 1)$

D'après l'hypothèse forte de récurrence, $u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{6}{n} \sum_{k=0}^n k$

soit $u_{n+1} = \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = 3(n + 1)$

On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket P_k \Rightarrow P_{n+1}$

D'après le principe de récurrence forte la propriété P_n est donc vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 15:

1. Commençons par l'existence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1)$.

Initialisation : On a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec $p = q = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n , montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

- (a) Si $n + 1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k$.

Comme $k \leq n$, par hypothèse de récurrence, il existe $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k = 2^r(2s + 1)$.

Ainsi, $n + 1 = 2 \times 2^r(2s + 1) = 2^{r+1}(2s + 1)$. Donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$ avec $p = r + 1$ et $q = s$.

- (b) Si $n + 1$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k + 1 = 2^0(2k + 1)$. Donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$ avec $p = 0$ et $q = k$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Montrons l'unicité de la décomposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q + 1) = 2^r(2s + 1)$.

Quitte à échanger les couples (p, q) et (r, s) , supposons que $p \geq r$.

Alors $2^p(2q + 1) = 2^r(2s + 1) \iff 2^{p-r}(2q + 1) = 2s + 1$.

$2s + 1$ est un entier impair donc $2^{p-r}(2q + 1)$ aussi, ce qui est impossible si $p \neq r$ (sinon il serait multiple de 2). Donc $p = r$.

Ainsi, $2q + 1 = 2s + 1 \iff q = s$.

On a donc $(p, q) = (r, s)$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

Exercice 16:

1. Montrons que $A = B$ par double inclusion.

- ★ Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$,

Ce qui signifie que $x \in A$ et $x \in B$.

Donc $A \subset B$

- ★ Soit $x \in B$. Montrons que $x \in A$.

Si $x \in B$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$,

Ce qui signifie que $x \in A$ et $x \in B$.

Donc $B \subset A$

Finalement, par double inclusion, $A = B$

2. ★ Montrons d'abord que $A \subset B$.

Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = B \cap C$ donc $x \in B$ et $x \in C$.

Ainsi $x \in B$ et $A \subset B$

- ★ Montrons ensuite que $B \subset C$.

Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B = B \cap C$ donc $x \in B$ et $x \in C$.

Ainsi $x \in C$ et $B \subset C$

Finalement, on obtient $A \subset B \subset C$

Exercice 17:

Montrons par récurrence simple que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^n > 1 + nx$. On notera P_n la propriété au rang n .

Initialisation pour $n = 2$:

on a $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$

Or pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, x^2 > 0$ d'où $(1 + x)^2 > 1 + 2x$

La propriété P_2 est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, fixé. On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire que :

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^n > 1 + nx$.

Montrons que la propriété reste vraie au rang $n + 1$, c'est à dire que :

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^n > 1 + nx$

soit $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^{n+1} > (1 + nx)(1 + x)$ puisque $1 + x > 0$

Ainsi $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, (1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$ puisque $nx^2 > 0$

On a $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est donc vraie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 18:

$$\boxed{n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}}$$

On calcule directement $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ ce qui prouve que n^2 impair.

$$\boxed{n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}}.$$

On démontre la contraposée " n pair $\Rightarrow n^2$ pair". (cf cours)

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS!

Exercice 19:

1. $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ est le développement de $(A \cup (B \cap \bar{B}))$.

De même $(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ est le développement de $(\bar{A} \cup (B \cap \bar{B}))$.

Donc $X = (A \cup (B \cap \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup (B \cap \bar{B}))$.

Or $B \cap \bar{B} = \emptyset$ d'où $X = (A \cup \emptyset) \cap (\bar{A} \cup \emptyset)$

Soit $\boxed{X = A \cap \bar{A} = \emptyset}$.

De la même manière $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ est le développement de $(A \cap (B \cup \bar{B}))$.

Et $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ est le développement de $(\bar{A} \cap (B \cup \bar{B}))$.

Donc $Y = (A \cap (B \cup \bar{B})) \cup (\bar{A} \cap (B \cup \bar{B}))$.

Or $B \cup \bar{B} = E$ d'où $Y = (A \cap E) \cup (\bar{A} \cap E)$

Soit $\boxed{Y = A \cup \bar{A} = E}$

2. Il s'agit de démontrer une équivalence, on va donc procéder par double implication.

$\Rightarrow$ On a $\bar{A} \subset B$. Montrons que $A \cup B = E$.

Il s'agit de montrer l'égalité de deux ensembles, on procède donc par double inclusion.

— Comme A et B sont des parties de E on a clairement $\boxed{A \cup B \subset E}$.

— Soit $x \in E$ alors $x \in A \cup \bar{A}$, c'est à dire $x \in A$ ou $x \in \bar{A}$.

Comme $\bar{A} \subset B$, on a donc $x \in A$ ou $x \in B$, soit $x \in A \cup B$

Ceci prouve que $\boxed{E \subset A \cup B}$.

Ainsi on a prouvé par double inclusion que $\boxed{A \cup B = E}$.

$\Leftarrow$ On a $A \cup B = E$. Montrons que $\bar{A} \subset B$.

Soit $x \in \bar{A}$. Alors x qui est aussi un élément de E appartient à $A \cup B$.

Ainsi $x \in A$ ou $x \in B$ et comme $x \notin A$ par hypothèse, on en déduit donc que $x \in B$.

Finalement on a $\boxed{\bar{A} \subset B}$.

3. Pour démontrer l'égalité des deux ensembles, on procède par double inclusion :

— Montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$ alors $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tels que $x = 4p = 6q$.

L'égalité $4p = 6q$ donne après simplification $2p = 3q$. On en déduit donc que q est pair. Ainsi

$\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2a$.

Finalement $x = 6q = 12a$ donc x est un multiple de 12. Ainsi $x \in B$ d'où $\boxed{A \subset B}$.

— Montrons que $B \subset A$

Soit $x \in B$ alors $\exists p \in \mathbb{N}$ tels que $x = 12p = 4 \times (3p) = 6 \times (2p)$.

Ainsi x est un multiple de 4 et de 6. Donc $x \in A$

Donc $\boxed{B \subset A}$.

Par conséquent par double inclusion, les deux ensembles sont égaux.

Exercice 20:

Partie A

1. f est dérivable sur son ensemble de définition de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{x^2}) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 2}{x^2}$.

f' est donc du signe de $x^2 - 2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

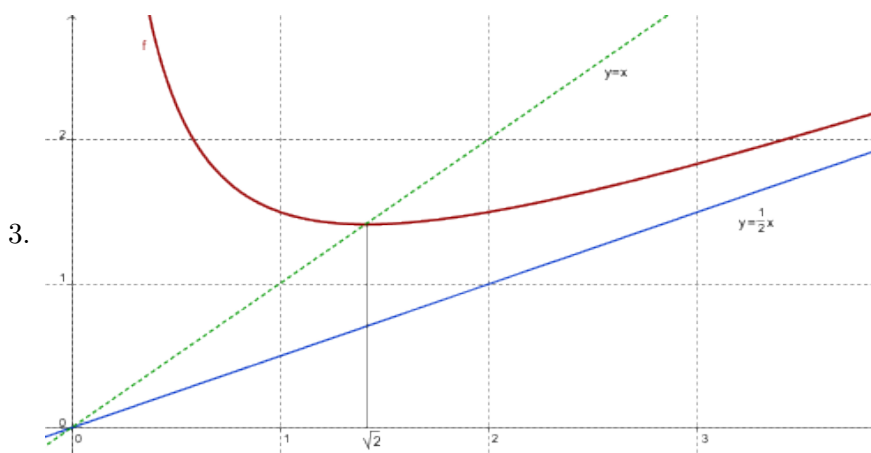
x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\searrow \quad \nearrow$ $\sqrt{2}$	

Remarque : $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. on dit que $\sqrt{2}$ est un point fixe de f .

2. Un calcul direct de limites donne : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ainsi la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f .



Partie B

1. a) $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{2}$

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$$

- b) Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$ est vraie. On notera P_n cette propriété.

Initialisation pour $n = 1$:

D'après la question précédente on a $\sqrt{2} < u_2 < u_1 \leq \frac{3}{2}$ donc P_1 est vérifiée.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé.

On suppose la propriété P_n . Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$, c'est à dire que $\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

On a d'après l'hypothèse de récurrence $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$.

Or d'après la partie A, on sait que sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, la fonction f est strictement croissante donc a fortiori sur $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$, d'où :

$$f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{17}{12} \leq \frac{3}{2}.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci prouve que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$|u_n - \sqrt{2}| = u_n - \sqrt{2}$ puisque d'après la question précédente $\sqrt{2} < u_n$.

$$\text{Or } u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right) - \sqrt{2}.$$

$$u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1} + 2).$$

$$\text{Ainsi } u_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2.$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} \geq 1 \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}.$$

b) Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$. On notera P_n cette propriété.

Initialisation pour $n = 0$

On a $u_0 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \approx -0,41$ donc $|u_0 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}$ donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose P_n vraie. Montrons que P_{n+1} vraie, c'est à dire que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+2}-1}$.

D'après la question précédente on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$.

Soit d'après notre hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}\right)^2.$$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+2}-2}.$$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+2}-1}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

c) Ainsi on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. On peut donc conclure que $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{2}}$.

La convergence de cette suite est particulièrement rapide.