

Devoir Calculs

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés ne seront pas pris en compte dans la notation.
- Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- La qualité de la rédaction (soin, orthographe ...) et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 - Un peu de calcul pour commencer

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \left(\frac{4 + \sqrt{5}}{3} \right)^{10} \times \left(\frac{4 - \sqrt{5}}{3} \right)^{10}$$

$$2. B = \frac{\frac{1}{7} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{7} + \frac{2}{3}}$$

$$3. C = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}}{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3}}$$

$$4. D = \frac{(-5)^3 \times (-2)^4 \times 3}{25^3 \times (-3)^{-3}}$$

Problème 1 - Calcul

On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

On note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On propose de simplifier l'expression de α et β .

- Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
 - Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
 - En déduire une expression simple de $(\alpha + \beta)^3$ en fonction de α et β .
- On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
 - A l'aide de la question précédente, montrer que u est une racine de P , c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
 - Trouver une racine évidente de P .
 - Trouver trois nombres réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
 - Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - En déduire la valeur de u .
- On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto (x - \alpha)(x - \beta)$.
 - A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x .
 - En déduire que α et β sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - Déterminer des expressions plus simples de α et β .