Corrigé du Devoir surveillé 0

Ex 1

1. $$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4+\sqrt{5}}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{4-\sqrt{5}}{3}\right)^{10} \\ &= \left(\left(\frac{4+\sqrt{5}}{3}\right) \times \left(\frac{4-\sqrt{5}}{3}\right)\right)^{10} \\ &= \left(\frac{16-5}{9}\right)^{10} \\ &= \left(\frac{11}{9}\right)^{10} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{1}{7}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{7}+\frac{2}{3}} \\ &= \frac{\frac{3}{21}-\frac{14}{21}}{\frac{3}{21}+\frac{14}{21}} \\ &= \frac{\frac{-11}{21}}{\frac{17}{21}} \\ &= \frac{-11}{17} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}}{\left(2+\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{10}{15}-\frac{4}{15}}{\frac{8}{3}\times\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} D &= \frac{(-5)^3\times(-2)^4\times 3}{25^3\times(-3)^{-3}} \\ &= \frac{2^4\times 3^4}{5^3} \\ &= \frac{6^4}{5^3} \end{aligned}$$

Problème 1

1. (a) On a d'après les propriétés de la racine cubique :

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} \\ &= \sqrt[3]{2^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{4-5} \\ &= \sqrt[3]{-1} \\ &= -1 \text{ (car } (-1)^3=-1). \end{aligned}$$

Et

$$\alpha^3+\beta^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5} = 4.$$

(b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{aligned}$$

(c) On remarque en utilisant les questions précédentes que

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 4-3(\alpha+\beta).$$

2. (a) On obtient donc que
$$P(u) = u^3 + 3u - 4 = 0.$$
(b) On a $P(1) = 1^3 + 3 \times 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$.
On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(ax^2 + bx + c) = x^3 + 3x - 4$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $x \in \mathbb{R}$
$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$
Par identification, on trouve
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases}$$
Après résolution, on trouve
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \\ c = 4 \end{cases}$$
On obtient $(x-1)(x^2 + x + 4) = x^3 + 3x - 4$.
(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x^2 + x + 4 = 0 \end{aligned}$$
On reconnaît une équation polynomiale du second degré de discriminant $-15 < 0$. Donc l'unique solution est 1.
(d) Comme u est racine de P, on trouve $u = 1$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - ux + \alpha\beta \\ &= x^2 - x - 1 \text{ en utilisant les résultats des questions précédentes} \end{aligned}$$
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} Q(x) = 0 &\iff (x-\alpha)(x-\beta) = 0 \\ &\iff x - \alpha = 0 \text{ ou } x - \beta = 0 \\ &\iff x = \alpha \text{ ou } x = \beta \end{aligned}$$
D'après la question précédente, α et β sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
(c) L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est égal à $5 > 0$. Cette équation a deux solutions $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Comme $\alpha > \beta$, on trouve que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a montré que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.