

TD02 – Correction

Exercice 1:

1. (a) $\frac{248}{1024} = \frac{31}{128}$ (d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) = -\frac{11}{60}$ (f) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$
 (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ (e) $\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)} = -\frac{247}{8}$ (g) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{49}{52}$
 (c) $2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{51}{14}$
2. (a) $(a^3)^2 \times a^{-4} = a^2$ (f) $\frac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{15} \times 2^{220}} = \frac{1}{2 \times 3^{61}}$ (j) $\frac{0,03 \times 5^3 \times 10^4}{6 \times 50^2 \times 10^3} = 25 \cdot 10^{-4}$
 (b) $a^2 b^{-3} (ab)^4 = a^6 b$ (g) $\frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3} = \frac{3^{16}}{2^{13}}$ (k) $(7^3)^2 + 49^3 = 2 \cdot 7^6$
 (c) $2^{23} \times 0,5^{24} = \frac{1}{2}$ (h) $\frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} = 3^9$ (l) $\frac{3^5 \times 81}{9^{-3}} = 3^{15}$
 (d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{2}{3}$ (i) $\frac{7^3 \times 10^{-3} \times 0,6^2}{12^2 \times 10^4 \times 5} = 5 \cdot 7^3 \cdot 10^{-11}$ (m) $81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} = 3^{28}$
 (e) $\frac{a^3 b^{-2}}{a^{4b-3}} = \frac{b}{a}$ (n) $\frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} = 2^{-7}$
3. (a) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (e) $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$ (h) $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{63}{55}$
 (b) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (f) $5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} = -5\sqrt{3}$ (i) $\frac{2}{3\sqrt{5}-1} = \frac{3\sqrt{5}+1}{22}$
 (c) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (g) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}}$
4. (a) $0,1^5 \cdot (-0,001^2) \cdot 0,01^2 = -10^{-15}$ (b) $\frac{63}{1920} = 3,28125 \cdot 10^{-5}$ (h) $-9 \times 10^{-8} - 4,2 \times 10^{-8} + 9,4 \times 10^{-8} = -3,8 \cdot 10^{-8}$
 (b) $\frac{9 \times 14 \times 11^2}{15 \times 21 \times 22} = 2,2$ (f) $\frac{49}{21} (impossible)$ (i) $-0,8 \times 10^7 + 0,05 \times 10^7 + 2,32 \times 10^7 = 1,57 \cdot 10^7$
 (c) $0,00594 = 5,94 \cdot 10^{-3}$ (g) $35 \times 10^6 + 3 \times 10^6 + 2,9 \times 10^6 = 4,09 \cdot 10^7$

Exercice 2:

1. $A = \frac{14b^4x}{15a^2x} \cdot \frac{5ay}{7b^3y} = \frac{2b}{3a}$ 5. $E = \frac{21a^2b+7a^3b^2}{7a^3b^2} = \frac{3+ab}{ab}$
2. $B = \frac{2x^3-4x^2+2x}{6x^2-6} = \frac{x(x-1)}{3(x+1)}$ 6. $F = \frac{2x^2+4x}{x+2} = 2x$
3. $C = \frac{\frac{x^2+2x-15}{x^2-6x+9}}{\frac{x+5}{x^2+x}} = \frac{x(x+1)}{x-3}$ 7. $G = \frac{x^2+x}{2x} = \frac{x+1}{2}$
4. $D = \frac{2x+5}{x^2+5x-36x} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+9}$ 8. $H = \frac{4\sqrt{3}+10\sqrt{2}}{2} - \sqrt{12} + \sqrt{32} - \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{13}{2}\sqrt{2}$

Exercice 3:

1. (a) $I = [-13/8; -3/2]$
 (b) $I = \emptyset$
 (c) $I =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$
 (d) $I = \mathbb{R}$
2. (a) $A = [-2; 5]$ Intervalle
 (b) $A =]1; 3[$ Intervalle
 (c) $A = \mathbb{R}$ Intervalle
 (d) $A = [-5; 7]$ Intervalle
 (e) $A = [3; 2]$ Intervalle
 (f) Ce n'est pas un intervalle

Exercice 4:

1. $A = \frac{x+1}{\sqrt{4x+4}} - (\sqrt{3x+3})^3 = \sqrt{x+1} \left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{3}(x+1)\right)$ 4. $D = 4(x^2+x+2)^2 - (2x^2-1)^2 = (2x+5)(4x^2+x+1)$
2. $B = \sqrt{9(x-1)} - 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}$ 5. $E = 2(x^2+3)^2 - (3+\sqrt{2}x^2)^2 = 3(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}x^2+3(\sqrt{2}+1))$
3. $C = (2x^2-1)^2 - (2x^2+x)^2 = -(x+1)(4x^2+x-1)$

$$6. F = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} - 1 = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$8. I = \frac{(8x+4)(4x+2)}{2} = 4(2x+1)^2$$

$$7. G = 3 \frac{(x+1)^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1)^2} - 4 = \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}x+\sqrt{3}-2)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}x-1)^2}$$

Exercice 5:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$6x + 1 = -x + 4 \iff 7x = 3 \quad (1)$$

$$\iff x = \frac{3}{7} \quad (2)$$

L'équation a une unique solution : $\frac{3}{7}$.

2. Attention quand on divise deux fractions entre elles et quand on divise par un nombre négatif dans une inéquation.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{4}x + 1 \geq \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \iff -\frac{5}{8}x \geq -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\iff x \leq \frac{4}{5} \quad (4)$$

On trouve que l'ensemble des solutions est $\left] -\infty, \frac{4}{5} \right]$.

3. On se ramène à une équation produit nul en faisant passer le second membre dans le premier : l'équation est équivalente à $(5-x)((2x+1)+(x+1))=0$. Les solutions sont $-\frac{2}{3}$ et 5.

4.

Exercice 6:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = 2 \iff x = -2 \text{ ou } x = 2$$

Les solutions sont -2 et 2 .

2. Il n'y a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|2x + 4| = 0 \iff 2x + 4 = 0 \quad (5)$$

$$\iff x = -2 \quad (6)$$

Il y a une unique solution : -2 .

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|-2x + 1| = 1 \iff -2x + 1 = -1 \text{ ou } -2x + 1 = 1 \quad (7)$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = 0. \quad (8)$$

Il y a deux solutions : 0 et 1 .

5. Soit $x \in \mathbb{R}$

On va raisonner par disjonction de cas. On étudie le signe de $4x + 1$ et de $2x - 3$ pour enlever les valeurs absolues

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - 3$	$-$	$-$	0	$+$

1er cas : $x \in]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

L'équation devient $4x + 1 = 2x - 3 \iff x = -2$.

2eme cas : $x \in]-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}[$

L'équation devient $4x + 1 = -(2x - 3) \iff x = \frac{1}{3}$.

On trouve deux solutions : -2 et $\frac{1}{3}$.

Dans la suite, la rédaction n'est pas détaillée et est donc insuffisante. Les résultats sont donnés à titre indicatif.

6. L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.
7. L'ensemble des solutions est $] -5, 5[$.
8. L'ensemble des solutions est $] -\infty, -7] \cup [7, +\infty[$.
9. L'ensemble des solutions est $] -3, 1[$.
10. L'ensemble des solutions est $] -\infty, -3[\cup] -2, +\infty[$.

Exercice 7:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, On résout l'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$. Le discriminant est égale à 8. Donc l'équation a deux solutions $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $]2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

Comme $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, l'équation a deux solutions 1 et 2

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + x + 1 = 1 \iff x(x + 1) = 0.$$

L'ensemble des solution est $\{-1; 0\}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \iff 2(x - 1)(x - \frac{1}{2}) = 0.$$

L'ensemble des solution est $\{\frac{1}{2}; 1\}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 + 7x - 5 = -(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Les solutions sont 1 et $\frac{5}{2}$ (équation du second degré).

6. On utilise les identités remarquables pour se ramener à une étude de signes :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 + 2x + 1)^2 < 16 \iff (x^2 + 2x + 1)^2 - 4^2 < 0, \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (9)$$

$$\iff (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 5) < 0 \quad (10)$$

$$\iff x^2 + 2x - 3 < 0 \quad (11)$$

car $x^2 + 2x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car son discriminant est strictement négatif). On trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -3, 1[$.

Dans la suite, la rédaction n'est pas détaillée et est donc insuffisante. Il faudrait entre autre chose déterminer l'ensemble sur lequel on peut résoudre ces équations et inéquations. Les résultats sont donnés à titre indicatif.

7. Il faut déterminer le signe d'un quotient donc on utilise un tableau de signes. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \geq 0$, le signe du quotient est celui du dénominateur. Les racines du dénominateur sont $-\frac{1}{2}$ et -3 .

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $] -\infty, -3[\cup] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

8. On se ramène à une étude de signe en faisant passer le « 1 » dans le membre de gauche et en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{4x^2 - 15x - 3}{2x^2 - 5x - 3} \geq 1 \iff \dots \iff \frac{2x(x-5)}{2x^2 - 5x - 3} \geq 0$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	3	5	$+\infty$
$2x$		–	–	0	+	+
$x - 5$		–	–	–	–	0
$2x^2 - 5x - 3$		+	0	–	–	0
$\frac{2x(x-5)}{2x^2-5x-3}$		+	–	0	+	+

et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[\cup [0, 3[\cup [5, +\infty[$.

9. On passe l'un des membres de l'inégalité dans l'autre membre et on réduit au même dénominateur pour se ramener à une étude de signes. On trouve que l'inéquation proposée est équivalente à $\frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} \leq 0$. Comme on veut faire une étude de signe, on ne développe pas le dénominateur. On trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]1, 2[\cup [3, 4]$ (attention aux valeurs interdites!).
10. En faisant passer le membre de droite dans le membre de gauche et en réduisant au même dénominateur, on trouve que

$$x + \frac{2}{x} \leq 4 \iff \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0$$

On fait un tableau de signes en cherchant au préalable les racines du trinôme au numérateur. On trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty, 0[\cup [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$.

Exercice 8:

1. On résout l'équation en faisant le changement de variable $X = x^2$. On se ramène à une équation du second degré admettant pour solution $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation initiale sont $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Les solutions sont $-1, 1, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
3. On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}^+$ car la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on fait le changement de variable $X = \sqrt{x}$. On a alors :

$$8x - 18\sqrt{x} - 11 \geq 0 \iff 8X^2 - 18X - 11 \geq 0$$

On calcule le discriminant du polynôme du second degré $\Delta = 676 = 26^2$. Donc le polynôme admet deux racines : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{11}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned} 8X^2 - 18X - 11 \geq 0 &\iff X \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{11}{4}; +\infty \right[\\ &\iff X \in \left[\frac{11}{4}; +\infty \right[\text{ car } X \geq 0 \\ &\iff X \geq \frac{11}{4} \\ &\iff \sqrt{x} \geq \frac{11}{4} \\ &\iff x \geq \frac{121}{16} \text{ car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (en x) est $\left[\frac{121}{16}, +\infty \right[$.

Exercice 9:

On note respectivement A, B, C, D, E et F ces ensembles.

1. On a $\sup(A) = \max(A) = 2$ et $\inf(A) = \min(A) = 0$.
2. Cet ensemble n'est pas majoré ni minoré. Il n'admet donc pas de borne inférieure ni de borne supérieure (et donc pas de maximum et de minimum).
3. On a $\max(C) = \sup(C) = 4$. On a $\inf(C) = 3$ mais C n'admet pas de minimum.
4. On peut écrire plus simplement l'ensemble $D : D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Cet ensemble n'est ni majoré, ni minoré : les nombres $\max(D)$, $\min(D)$, $\sup(D)$ et $\inf(D)$ n'existent pas.
5. On a $E =]1, +\infty[$. L'ensemble E n'est pas majoré donc $\max(E)$ et $\sup(E)$ n'existent pas. On a $\inf(E) = 1$ et $\min(E)$ n'existe pas.
6. Il est utile de représenter géométriquement l'ensemble F . Cela permet de voir que $F = \mathbb{R}^*$ ce que l'on démontre ensuite par double inclusion. On se retrouve dans la même situation qu'à la question 2.

Exercice 10:

1. En encadrant $(-1)^n$ et $\frac{1}{n+1}$, on trouve que A est majoré par 2 et est minoré par -1 . Donc A est borné.
2. On utilise la propriété de la borne supérieure/inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré/minoré.
3. L'ensemble A possède un plus grand élément qui est 2 (obtenu en prenant $n = 0$). Donc $\max(A) = \sup(A) = 2$. On a $\inf(A) = -1$ et on montre en raisonnant par l'absurde que cette borne inférieure n'est pas atteinte. Donc A n'a pas de plus petit élément.

Exercice 11:

1. L'ensemble des solutions de (S_1) est $\left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$.
2. L'ensemble des solutions de (S_2) est $\left\{\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.
3. L'ensemble des solutions de (S_3) est $\emptyset$.
4. L'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(1, -1, 5)\}$.
5. L'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(1, -c, c) | c \in \mathbb{R}\}$.
6. L'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(-2, 4, -3)\}$.

Exercice 12: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. On a, par définition

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$$

Il faut étudier $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ quand $a \geq b$ et quand $a < b$.

Exercice 13:

On a

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n+1} &= \frac{n^3 + n^2 - n^2}{n+1} \\ &= \frac{n^3 + n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+1} \\ &= n^2 - \frac{n^2 + n - n - 1 + 1}{n+1} \\ &= n^2 - \frac{n^2 + n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= n^2 - n + 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\lfloor \frac{n^3}{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor n^2 - n + 1 - \frac{1}{n+1} \right\rfloor = n^2 - n + 1 + \left\lfloor -\frac{1}{n+1} \right\rfloor = n^2 - n$$

Exercice 14:

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $n[x] \leq nx$. Ainsi $n[x]$ est un entier inférieur à nx , d'où $n[x] \leq [nx]$.

De plus on sait que $x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $nx < n\lfloor x \rfloor + n$.

Ainsi $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < n$. Or $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$ est un entier et on rappelle que, si k est un entier alors l'inégalité $k < n$ est équivalente à $k \leq n - 1$. On a donc $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1$.

Exercice 15:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

Le domaine de validité de l'équation est $[-2, +\infty[$ (car la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.)

Soit $x \in [-2, +\infty[$.

- ★ 1er cas : $x \in [-2, 4[$. Alors $x - 4 < 0$ et comme $\sqrt{x+2} \geq 0$, l'équation n'a pas de solution dans $[-2, 4[$
- ★ 2ème cas : $x \in [4, +\infty[$. Alors $x - 4 \geq 0$ et $\sqrt{x+2} \geq 0$ donc comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\sqrt{x+2} = x - 4 \iff x + 2 = (x - 4)^2 \iff x^2 - 9x + 14 = 0$$

Cette équation du second degré a deux solutions réelles : 2 et 7. Or, x appartient à l'intervalle $[4, +\infty[$ donc $x = 7$.

Conclusion : l'équation proposée admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est $x = 7$.

2. Le domaine de validité de l'équation est $[1, +\infty[$. Soit $x \in [1, +\infty[$. On multiplie l'équation par la forme conjuguée du terme de gauche. On raisonne alors par implication (on pourrait raisonner par équivalence en montrant que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} \neq 0$).

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} &\Rightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}) = \sqrt{5}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}) \\ &\Rightarrow x - 1 - (x + 4) = \sqrt{5}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}) \\ &\Rightarrow -5 = \sqrt{5}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}) \\ &\Rightarrow -\sqrt{5} = (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4}) \\ &\Rightarrow \sqrt{5} = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{5} \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes on obtient :

$$2\sqrt{x+4} = 2\sqrt{5}$$

donc $\sqrt{x+4} = \sqrt{5}$ donc $x + 4 = 5$ donc $x = 1$. Comme on a raisonné par implication il faut vérifier que la solution convient. On a bien :

$$\sqrt{1-1} + \sqrt{1+4} = 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

3. Le domaine de validité de l'équation est $] -\infty, -1] \cup [2, +\infty[$ et il faut que $3x + 2 \geq 0$. En élevant au carré, on obtient une équation du second degré qui n'a pas de solution. Donc l'équation de départ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
4. Le domaine de validité de l'inéquation est $[-1, +\infty[$ et il faut que $2x - 3 > 0$ (à cause de la racine carrée). On élève au carré (on raisonne par équivalence). On trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] \frac{13 + \sqrt{41}}{8}, +\infty \right[$.
5. Le domaine de validité de l'inéquation est $] -\infty, -4] \cup [5, +\infty[$. On trouve que l'ensemble de solutions de l'inéquation est $] -\infty, -4]$.
6. Le domaine de validité de l'équation est $\left[\frac{1}{4}, +\infty \right[$. L'ensemble de solutions est $\left[\frac{2}{3}, +\infty \right[$.
7. L'inéquation n'a pas de solution.

Exercice 16:

1. On commence par étudier le signe de $2x + 3$ et de $2x - 1$ suivant les valeurs de x . On résout ensuite l'équation en étudiant plusieurs cas. On trouve que l'ensemble de solutions est $\{-6, 0, 2\}$.
2. On commence par étudier le signe de $2x - 3$ et de $3x + 5$ suivant les valeurs de x puis on traite plusieurs cas pour résoudre l'inéquation. On trouve que l'ensemble des solutions est

$$\left] -\infty, -8 \right[\cup \left[-\frac{2}{5}, +\infty \right[$$

3. On utilise le fait que $\sqrt{(3x+5)^2} = |3x+5|$. On trouve que l'équation n'a pas de solution.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on note (E) l'équation $|2x - 1| - 1 = |x + 3|$
On a les équivalences suivantes,

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$x + 3 > 0 \iff x > -3 \quad (13)$$

Nous allons distinguer les cas.

1er cas : si $x \geq \frac{1}{2}$

alors l'équation (E) devient $2x - 1 - 1 = x + 3$

Cette équation a une solution dans $[\frac{1}{2}; +\infty[: x = 5$.

2eme cas : si $-3 \leq x < \frac{1}{2}$

alors l'équation (E) devient $-2x + 1 - 1 = x + 3$

la solution de l'équation dans $[-3; \frac{1}{2}[$ est -1 .

3eme cas : si $x < -3$

alors l'équation (E) devient $-2x + 1 - 1 = -x - 3$

Cette équation n'a pas de solution dans $] -\infty; -3]$. En effet la seule solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation est $3 \notin] -\infty; -3]$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est $\mathcal{S} = \{5; -1\}$

5. L'inéquation est valide si et seulement si $x + 3 \neq 0$. On cherche donc des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-2}{x+3} \right| > 1 &\iff \frac{|x-2|}{|x+3|} < 1 \\ &\iff |x-2| > |x+3| \text{ car } |x+3| > 0 \end{aligned}$$

Distinguons l'écriture de cette inégalité en fonction de l'intervalle considéré.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$ x - 2 $	$-x + 2$	$-x + 2$	0	$x - 2$
$ x + 3 $	$-x - 3$	0	$x + 3$	$x + 3$
$ x - 2 > x + 3 $	$-x + 2 > -x - 3$	$-x + 2 > x + 3$	$x - 2 > x + 3$	

Ainsi :

★ Soit $x \in] -\infty, -3[$,

$|x - 2| > |x + 3| \iff -x + 2 > -x - 3 \iff 2 > -3$, toujours vrai donc l'ensemble $] -\infty, -3[$ est solution.

★ Soit $x \in] -3, 2[$,

$|x - 2| > |x + 3| \iff -x + 2 > x + 3 \iff x < \frac{-1}{2}$, donc l'ensemble $] -3, \frac{-1}{2}[$ est solution.

★ Soit $x \in [2, +\infty[$,

$|x - 2| > |x + 3| \iff x - 2 > x + 3 \iff -2 > 3$, impossible.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $] -\infty, \frac{-1}{2}[\setminus \{-3\}$

6. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ et $2x^2 - 2 = 2(x - 1)(x + 1)$

Distinguons l'écriture de cette inégalité en fonction de l'intervalle considéré.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$ x^2 - 3x + 2 $	$x^2 - 3x + 2$	$x^2 - 3x + 2$	0	$-x^2 + 3x - 2$	$x^2 - 3x + 2$
$ 2x^2 - 2 $	$2x^2 - 2$	0	$-2x^2 + 2$	0	$2x^2 - 2$

★ Soit $x \in]-\infty, -1]$,

$|x^2 - 3x + 2| \leq |2x^2 - 2| \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 2x^2 - 2 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$ donc l'ensemble $] -\infty, -4]$ est solution.

★ Soit $x \in]-1, 1]$,

$|x^2 - 3x + 2| \leq |2x^2 - 2| \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq -2x^2 + 2 \Leftrightarrow 3x(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$, donc l'ensemble $[0, 1]$ est solution.

★ Soit $x \in]1, 2]$,

$|x^2 - 3x + 2| \leq |2x^2 - 2| \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \leq 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 3x(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, donc l'ensemble $]1, 2]$ est solution.

★ Soit $x \in]2, +\infty[$,

$|x^2 - 3x + 2| \leq |2x^2 - 2| \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 2x^2 - 2 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$ donc l'ensemble $]2, +\infty[$ est solution.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $] -\infty, -4] \cup [0, +\infty[$

Exercice 17:

1. Il faut traiter à part le cas $m = 0$ qui correspond à une équation du premier degré. Si $m \neq 0$, alors on a affaire à une équation du second degré de discriminant $\Delta_m = (m - 3)^2(m + 3)^2$ (en factorisant à l'aide des identités remarquables). On discute ensuite suivant les valeurs de m , c'est-à-dire suivant le signe de Δ_m . On trouve que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_m = \begin{cases} \{0\} & \text{si } m = 0 \\ \{-1\} & \text{si } m = -3 \\ \{1\} & \text{si } m = 3 \\ \{\frac{3}{m}, \frac{m}{3}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Le discriminant vaut $\Delta_m = 4(m - 1)(m + 1)$. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_m = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \in]-1, 1[\\ \{-1\} & \text{si } m = 1 \\ \{1\} & \text{si } m = -1 \\ \{-m - \sqrt{m^2 - 1}, -m + \sqrt{m^2 - 1}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On pose $X = e^x$ de manière à se ramener à une équation du second degré en X . Le discriminant vaut $\Delta_m = (1 - m)(3m + 1)$ puis on raisonne suivant le signe de Δ_m . On trouve que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_m = \begin{cases} \{0\} & \text{si } m \in \mathbb{R}_- \\ \{0, \ln(m)\} & \text{si } m \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Exercice 18:

1. Penser à utiliser l'expression conjuguée et à encadrer $2\sqrt{n} = \sqrt{n} + \sqrt{n}$.
2. En sommant les inégalités, on trouve que la somme S dans la partie entière est telle que $198 < S < 199$. Donc $[S] = 198$.