Devoir 1

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Les résultats non encadrés ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
- *La qualité de la rédaction (soin, orthographe ...) et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice 1 - Résolution d'(in)équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|3x-1|=7$
2. $|x-4|>-1$
3. $\left|\dfrac{4x+5}{2x-1}\right|<2$
4. $|-3x+4|+|-5+x|=10$

Exercice 2 - D'autres résolutions d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $x-1 \leqslant \sqrt{3x+7}$
2. $\dfrac{2x^2+3x}{x^2+x-2}>2$

Exercice 3 - Une première suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$.
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{3+6n}{3+2n}.$$

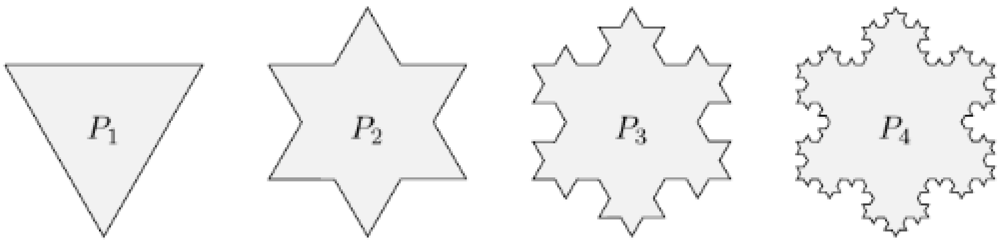
Exercice 4 - Une deuxième suite

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0=2$, $x_1=5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$.
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$x_n=3\times 2^n-1.$$

Exercice 5 - Le flocon de Von Koch

On considère un triangle équilatéral P_1 de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1. On obtient ainsi un polygone P_2. En procédant de la même façon à partir de P_2, on trouve un polygone P_3, puis en itérant le processus, on construit une suite de polygones P_n.



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'aire du polygone P_n.

1. Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de côté a où a est un réel strictement positif.
2. En déduire que $A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et que $A_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Dans toute la suite, on admet que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{n+1} = A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

Exercice 6 - De la logique

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble suivant

$$E = \left\{7k + 8l | (k,l) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

   (a) Montrer que $8 \in E$.
   (b) Montrer que $37 \in E$.
   (c) Montrer que $1 \notin E$ (On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.)

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer l'implication suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \quad -\epsilon \leq x \leq \epsilon \implies x = 0.$$

   (a) Ecrire la contraposée de l'implication.
   (b) Répondre à la question initiale.

3. Montrer que le produit de deux nombres pairs est pair.
4. Montrer que pour tout $(x,y)) \in \mathbb{R}^2$, $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$.