

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 - Résolution d'(in)équations

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} |3x - 1| = 7 &\iff 3x - 1 = -7 \text{ ou } 3x - 1 = 7 \\ &\iff 3x = -6 \text{ ou } 3x = 8 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -2; \frac{8}{3} \right\}$$

2. On sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|y| \geq 0$. L'inéquation proposé est toujours vraie. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{4x+5}{2x-1} \right| < 2 &\iff -2 < \frac{4x+5}{2x-1} < 2 \\ &\iff -2 < \frac{4x+5}{2x-1} \text{ et } \frac{4x+5}{2x-1} < 2 \\ &\iff 0 < \frac{8x+3}{2x-1} \text{ et } \frac{7}{2x-1} < 0 \end{aligned}$$

- Résolution des inéquations $0 < \frac{8x+3}{2x-1}$ et $\frac{7}{2x-1} < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$8x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{8x+3}{2x-1}$	$+$	0	$-$	$+$
$\frac{7}{2x-1}$	$-$	$-$	$+$	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; -\frac{3}{8} \right[$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -3x+4 > 0 &\iff x < \frac{4}{3} \\ -5+x > 0 &\iff x > 5 \end{aligned}$$

Distinguons suivant les intervalles

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$
$ -3x+4 $	$-3x+4$	0	$-(-3x+4)$	$-(-3x+4)$
$ -5+x $	$-(-5+x)$	$-(-5+x)$	0	$-5+x$

- premier cas : $x \in \left] -\infty, \frac{4}{3} \right]$,

$$\begin{aligned}
 |-3x+4| + |-5+x| = 10 &\Leftrightarrow -3x+4 - (-5+x) = 10 \\
 &\Leftrightarrow -4x+9 = 10 \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas la solution est $-\frac{1}{4}$ car $-\frac{1}{4} \leq \frac{4}{3}$.

- ★ deuxième cas $x \in \left] \frac{4}{3}, 5 \right]$,

$$\begin{aligned}
 |-3x+4| + |-5+x| = 10 &\Leftrightarrow -(-3x+4) - (-5+x) = 10 \\
 &\Leftrightarrow 2x+1 = 10 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas la solution est $\frac{9}{2}$ car $\frac{9}{2} \in \left] \frac{4}{3}, 5 \right]$.

- ★ troisième cas : $x \in]5, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 |-3x+4| + |-5+x| = 10 &\Leftrightarrow -(-3x+4) - 5+x = 10 \\
 &\Leftrightarrow 4x-9 = 10 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{19}{4}
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{19}{4} < 5$ il n'y a pas de solution dans ce cas.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{9}{2} \right\}$$

Exercice 2 - D'autres résolutions d'inéquations

- ★ On cherche le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D} \iff 3x+7 \geq 0 \iff x \geq -\frac{7}{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D} = \left[-\frac{7}{3}, +\infty \right[.$$

- ★ Soit $x \in \mathcal{D}$.

- premier cas : $x < 1$

On a $x-1 < 0$ et $\sqrt{3x+7} \in \mathbb{R}_+$. Donc l'inéquation est toujours vraie. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\mathcal{D} \cap]-\infty, 1[= \left[-\frac{7}{3}, 1[$

- deuxième cas : $x \geq 1$

Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $x-1 \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{3x+7} \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
 x-1 \leq \sqrt{3x+7} &\iff (x-1)^2 \leq 3x+7 \\
 &\iff x^2 - 2x + 1 \leq 3x+7 \\
 &\iff x^2 - 5x - 6 \leq 0
 \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 5x - 6$ a un discriminant égal à 49 et ses racines sont -1 et 6 . L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ est donc $[-1, 6]$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $[-1, 6] \cap [1, +\infty[= [1, 6]$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est $\boxed{\left[-\frac{7}{3}, 1\right] \cup [1, 6] = \left[-\frac{7}{3}, 6\right]}$.

2. **Domaine de validité :** soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation est valide si et seulement si $x^2 + x - 2 \neq 0$.
 Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 2$ est 9. L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ a deux solutions 1 et -2.
 Le domaine de validité de l'équation est : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} > 2 &\iff \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} - 2 > 0 \\ &\iff \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} > 0 \\ &\iff \frac{x + 4}{x^2 + x - 2} > 0 \end{aligned}$$

Effectuons un tableau de signe afin de résoudre cette inégalité.

x	$-\infty$	-4	-2	1	$+\infty$	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x^2 + x - 2$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	$+$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-4 ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

Exercice 3 - Une première suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = \frac{3 + 6n}{3 + 2n}$ ".

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On a $\frac{3 + 6 \times 0}{3 + 2 \times 0} = 1 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie, i.e que

$$u_{n+1} = \frac{3 + 6(n+1)}{3 + 2(n+1)} = \frac{3 + 6n + 6}{3 + 2n + 2} = \frac{9 + 6n}{5 + 2n}.$$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{9}{6 - u_n} \quad \text{par définition de la suite} \\ &= \frac{9}{6 - \frac{3 + 6n}{3 + 2n}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{9}{\frac{18 + 12n - 3 - 6n}{3 + 2n}} \\ &= \frac{9}{\frac{15 + 6n}{3 + 2n}} \\ &= \frac{9(3 + 2n)}{15 + 6n} \\ &= \frac{3 \times 3(3 + 2n)}{3(5 + 2n)} \\ &= \frac{9 + 6n}{5 + 2n} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 4 - Une deuxième suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: " $x_n = 3 \times 2^n - 1$ ".

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

On a $3 \times 2^0 - 1 = 3 - 1 = 2 = x_0$ et $3 \times 2^1 - 1 = 6 - 1 = 5 = x_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie, i.e que $x_{n+2} = 3 \times 2^{n+2} - 1$.

On a :

$$\begin{aligned}x_{n+2} &= 3x_{n+1} - 2x_n \quad \text{par définition de la suite} \\&= 3(3 \times 2^{n+1} - 1) - 2(3 \times 2^n - 1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\&= 9 \times 2^{n+1} - 3 - 3 \times 2^{n+1} + 2 \\&= 6 \times 2^{n+1} - 1 \\&= 3 \times 2 \times 2^{n+1} - 1 \\&= 3 \times 2^{n+2} - 1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 5 - Le flocon de Von Koch

1. On considère un triangle équilatéral ABC de côté a et on note H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de la droite (BC) .

Le triangle AHC est rectangle en C . D'après le théorème de Pythagore,

$$AH^2 = HC^2 - AC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2.$$

$$\text{Ainsi, } AH = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Donc l'aire de } ABC \text{ est } \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{a \times a \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2. P_1 est un triangle équilatéral de côté 1 donc l'aire de P_1 est $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'aire de P_2 est l'aire de P_1 à laquelle on rajoute l'aire de 3 triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{3}$. Donc

$$A_2 = A_1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: " $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$ ".

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{1-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} = A_1 \text{ donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e que

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= A_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{par définition de la suite} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{20}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{5}{4} \times \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{5}{9}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 6 - De la logique

- On a $8 = 7 \times 0 + 8 \times 1$. Donc $8 \in E$
 - On a $37 = 7 \times 3 + 8 \times 2$. Donc $37 \in E$
 - On raisonne par l'absurde. On suppose que $\exists(k, l) \in \mathbb{N}, 1 = 7k + 8l$.
Si $1 = 7k + 8l$ alors $8l = 1 - 7k \leq 1$. On a donc $l \leq \frac{1}{8}$.
Comme $l \in \mathbb{N}$, on obtient $l = 0$.
D'où $1 = 7k$ et $k = \frac{1}{7}$. Or $k \in \mathbb{N}$ CONTRADICTION.
- Soit $x \in \mathbb{R}$,
On considère la contraposée $x \neq 0 \implies (\exists \epsilon > 0, x < -\epsilon \text{ ou } x > \epsilon)$
 - On suppose que $x \neq 0$ et on veut montrer $\exists \epsilon > 0, x < -\epsilon \text{ ou } x > \epsilon$.
On va raisonner par disjonction de cas (sur le signe de x).
 - ★ Si x est positif, on peut prendre $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$. En effet, $x > \frac{x}{2}$
 - ★ Si x est négatif, on peut prendre $\epsilon = -\frac{x}{2} > 0$. En effet $x < -\epsilon = \frac{x}{2} < 0$
Dans tous les cas, on a trouvé un nombre $\epsilon > 0$ qui convient. Donc la contraposée est vraie.
On a montré que $\boxed{\forall \epsilon > 0, -\epsilon \leq x \leq \epsilon \implies x = 0.}$
- On veut montrer que le produit de deux nombres pairs est pair.
Soit p_1 et p_2 deux nombres pairs.
Montrons que $p_1 \times p_2$ est pair.
 p_1 est pair donc $\exists k_1 \in \mathbb{N}, p_1 = 2k_1$.
 p_2 est pair donc $\exists k_2 \in \mathbb{N}, p_2 = 2k_2$.
On a donc $p_1 \times p_2 = 2k_1 \times 2k_2 = 2(2k_1 \times k_2)$
Donc $p_1 \times p_2$ est pair
Conclusion : On a montré que $\boxed{\text{le produit de deux nombres pairs est pair.}}$
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On procède par disjonction de cas :
Premier cas : $x < y$
 $\frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - (y - x)) = \frac{1}{2}(2x) = x = \min(x, y)$
Deuxième cas : $x \geq y$
 $\frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = \frac{1}{2}(2y) = y = \min(x, y)$
Conclusion : on a montré que $\boxed{\text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).}$