Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Cercle trigonométrique

1. En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer :
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $\sin\left(\frac{16\pi}{6}\right)$ $\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$
2. En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les angles α, β, γ et δ tels que

$$\begin{cases}\cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\beta) = \frac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(\gamma) = -1\\ \sin(\gamma) = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos(2\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(4\delta) = -1\end{cases}$$

Exercice n° 2: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
2. $3\sin(3x) = -4$
3. $2\sin(5x) = -\sqrt{2}$
4. $\tan(2x) = 1$
5. $\tan(3x) = -\sqrt{3}$
6. $\sin(7x) = \sin(6)$
7. $\sin(5x) = \cos(\frac{5\pi}{3})$
8. $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(4x)$
9. $2\cos^2(\theta) + 3\cos(\theta) + 1 = 0$

Exercice n° 3: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$
2. $\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$
3. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
4. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$
5. $\cos(x) = \sin(x)\sin(2x)$
6. $\cos(2x) + \cos(x) + 1 = 0$

Je me perfectionne!

Exercice n° 4: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $\sin(x) < -\frac{1}{2}$
2. $\cos(2x) > 0$
3. $1 < \tan(x) \leq \sqrt{3}$
4. $\sin^2(x) + 3\cos(x) - 1 < 0$
5. $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) < 1$
6. $\cos(2x) + \sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Exercice n° 5:

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice n° 6:

1. En utilisant la formule de duplication du cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Faire de même pour trouver la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n° 7:

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que
$$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a
$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \qquad \text{et } \cos(t) = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Exercice n° 8:

1. En utilisant la définition de la tangente, montrer que si $(a,b) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[^2$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
2. En utilisant la formule précédente, montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice n° 9:

1. Calculer $\sin(\arcsin(\frac{1}{2}))$, $\arcsin(\sin(\pi))$, $\arcsin(\sin(\frac{17\pi}{3}))$, $\arcsin(\cos(\frac{\pi}{3}))$, $\arcsin(\sin(10))$ et $\arctan(-\tan(\frac{143\pi}{6}))$.
2. Pour tout $x \in [-1,1]$, simplifier l'expression $\sin(2\arcsin(x))$. (*Indication : on pourra utiliser que* $sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, *puis montrer que* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.)

Exercice n° 10: Application : Tension électrique

On considère $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ la tension aux bornes d'une prise de courant.

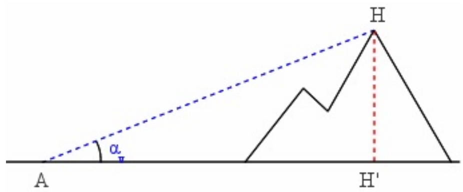
1. Montrer que u peut s'écrire sous la forme $u(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$ (ω est appelé pulsation, A amplitude ou tension maximale et Φ phase à l'origine).
2. Montrer que u est périodique.
3. Calculer en fonction de ω sa période et sa fréquence (l'inverse de la période).
4. La tension efficace correspondant à une tension variable de période T est donnée par

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt.$$

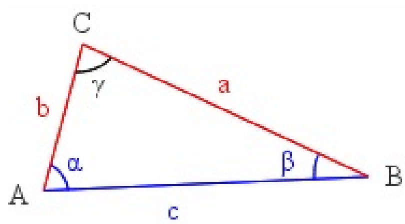
   Calculer U_{eff}.
5. Sachant qu'en France la fréquence du courant est de $50Hz$ et la tension efficace de $220V$, déterminer A et ω.

Exercice n° 11: Application : Détermination de l'altitude des montagnes par la méthode géodésique

1. Pour déterminer l'altitude d'une montagne, ou plutôt la différence de hauteur entre le sommet H de la montagne et un point A de la plaine, une première idée pourrait être de mesurer la hauteur angulaire α_v du sommet depuis le point A.

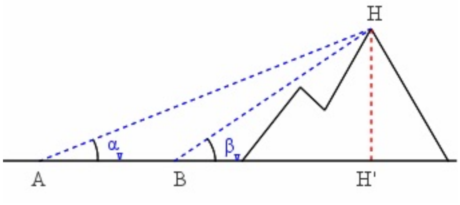


   Déterminer la hauteur HH' en fonction de AH puis en fonction de AH'.
   Les distances AH' et AH ne sont cependant pas connues ! La distance AH' n'est jamais mesurable directement et AH est une distance souvent trop grande pour être mesurée par les appareils courants.
2. Pour contourner la difficulté et déterminer la distance AH, l'idée est de mesurer des angles et une autre distance accessible, puis d'en déduire la première par un calcul de trigonométrie.
   Soit un triangle quelconque ABC, posons que le côté c et les deux angles α et β qui le bordent sont connus.



Exprimer a et b en fonction de α, β, et c

3. On mesure les hauteurs angulaires α_v et β_v du sommet H depuis deux points différents de la plaine A et B, ainsi que leur éloignement AB. A et B sont à la même altitude et sont choisis de telle sorte qu'ils sont alignés avec le sommet H.



En déduire AH puis, HH'.

Cette méthode est théorique, pour l'utiliser d'un point de vue pratique, il faut corriger les visées de deux facteurs : la sphéricité de la Terre et la réfraction atmosphérique.

Problème : extrait de DS

Exercice n° 12: (calcul de cosinus et sinus).

1. (Informatique - indépendant des questions suivantes) Ecrire une fonction `ProcheZero` qui prend en entrée un nombre `eps` et un réel `teta`, et qui renvoie l'entier naturel n le plus petit tel que $-$`eps`$\leq \cos^n(\theta) \leq$`eps`. On considérera que le réel `teta` appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   Le but du reste de l'exercice est de calculer certaines valeurs de cosinus et sinus

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \qquad (\star)$$
   On admet que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta)$$

3. Posons $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
   (a) Justifier que α est solution de l'équation $(\star)$.
   (b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.
   (c) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
   (d) Déterminer alors $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
   (e) Calculer $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$ et en déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$