Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1: Déterminer le domaine de définition.

1. $f_1(x) = \sqrt{-2x+6}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+5}$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
4. $f_4(x) = x|x|$
5. $f_5(x) = \lfloor x \rfloor + 2$
6. $f_6(t) = \ln(t^2+3t+2)$
7. $f_7(u) = \dfrac{u+4}{u^2-1}$
8. $f_8(x) = 5^x$
9. $f_9(x) = (x+5)^\pi$
10. $f_{10}(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)}{\theta}$

Exercice n° 2: Déterminer les intervalles images de $I = [-2, 1[$ pour les fonctions proposées.

1. $f_1 : x \mapsto x^2$
2. $f_2 : x \mapsto x^3$
3. $f_3 : x \mapsto 2+3x$
4. $f_4 : x \mapsto |2x|$
5. $f_5 : x \mapsto \lfloor x \rfloor - 1$
6. $f_6 : x \mapsto \cos(\frac{\pi}{4}x)$
7. $f_7 : x \mapsto \frac{-1}{x+3}$
8. $f_7 : x \mapsto x^2 - x$

Exercice n° 3: Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^x - e^{-x},\ f_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\ f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Exercice n° 4: Valeur maximale

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 5: Déterminer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{7-x}$$

$$B = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x^3}$$

$$C = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x(x+1)}$$

$$D = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$$

$$E = \lim_{x\to0^+} x^x$$

$$F = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(e^x)}{x^2+1}$$

$$G = \lim_{x\to1+} \ln(x) \times \ln(\ln(x))$$

$$H = \lim_{x\to+\infty} x^2 \times e^{-\sqrt{x}}$$

$$I = \lim_{x\to0^+} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$$

$$J = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - 3x + \ln x$$

$$K = \lim_{x\to+\infty} (\tfrac{1}{x})^{x+1}$$

Exercice n° 6: Déterminer les limites aux bords du domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{3x^2}{2-x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$
4. $f_4(x) = \sqrt{x^2-4x+3} - x$
5. $f_5(x) = \sqrt{x^2-4x+3} + x$
6. $f_6(x) = \ln(1+e^{3x})$
7. $f_7(x) = \ln(1+e^{3x}) - 3x$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

Exercice n° 7: Études de fonctions et résolutions d'inéquations

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

2. On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

(b) En déduire le signe de f et établir que

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

3. En procédant comme dans la question précédente, établir que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Je me perfectionne !

Exercice n° 8: Une étude de fonction.

Soit la fonction $f(x) = x - 1 + \ln(\dfrac{x-2}{x+2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier les limites de f au borne de son domaine de définition.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique Δ et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
4. Même question en $-\infty$.
5. Etudier les variations de f sur son domaine de définition *(Calcul de la dérivée pas encore vu en cours).*
6. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes .

Exercice n° 9: Une autre fonction.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est impaire f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
4. Etudier les variations de f *(Calcul de la dérivée pas encore vu en cours).*
5. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice n° 10: Et encore une autre fonction.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}$$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 4X - 1 = 0$ puis en déduire le signe de f' sur $]0,+\infty[$ puis le sens de variation de f. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice n° 11: Rédiger parfaitement la recherche des domaines de définition suivants.

$$f(x) = \ln(\ln(x)) \qquad g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} \qquad h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3-2x}}$$

Exercice n° 12: Des fonctions dans les sciences.

Le modèle de croissance animale de Verhulst décrit l'évolution d'une population comprenant initialement X_0 individus en fonction du temps t. On note X_{max} la capacité maximale du milieu (le nombre maximal d'animaux pouvant vivre dans ce milieu compte tenu des ressources nutritives)et r le taux de croissance.

On a $X(t) = \dfrac{1}{(\frac{1}{X_0} - \frac{1}{X_{max}})e^{-rt} + \frac{1}{X_{max}}}$

1. Déterminer le domaine de définition de X.
2. Déterminer la limite de $X(t)$ quand t tend vers l'infini. On distinguera selon le signe de r et on interprétera les résultats obtenus.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 13:

Soit f la fonction d'expression

$$f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) - 2x$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en 0^+.
3. (a) Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \ln\left(1 - e^{-x}\right) - x$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Étudier les variations de f sur son domaine de définition *(Calcul de la dérivée pas encore vu en cours).*
5. Étudier les éventuelles asymptotes de la fonction f. On montrera que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
6. Représenter graphiquement la fonction f en faisant apparaître les asymptotes.

Exercice n° 14:

Pour chacune des fonctions d'expressions suivantes, déterminer :

- son domaine de définition ;
- les limites aux bornes de son domaine de définition ;

1. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$;
2. $g(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$;
3. $h(x) = (x+1)^x$;
4. $k(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - e^{x^2}}$;
5. $\ell(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} - \sqrt{x^2 + 1}$.

Exercice n° 15:

On considère la fonction f d'expression

$$f(x) = \sqrt{x - 1 - \sqrt{3x - 5}}$$

1. **Recherche du domaine de définition de f.**

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

   $$x - 1 \geqslant \sqrt{3x - 5}$$

   (b) En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

   (c) Écrire un script `python` qui demande à l'utilisateur une valeur de x et qui l'informe si la valeur choisie appartient au domaine de définition de f ou non.
2. **Étude des variations de f.**

   (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée *(Calcul de la dérivée pas encore vu en cours).*

   (c) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice n° 16:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{4-\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté D.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.
3. Prouver que f est 2π-périodique. On remarquera qu'il suffit d'étudier la fonction sur $[0, \pi]$.
4. Étudier la dérivabilité de f sur D. Calculer sa dérivée.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
6. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par f sur $\mathbb{R}$.