Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1: Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions proposées.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{2x} - 3x^4$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2x^3 - x}{\ln x}$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}$
4. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2} \ln x$
5. $f : x \longmapsto x \ln(x) - x$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$
7. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $f : x \longmapsto (x-1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

Exercice n° 2: Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions proposées.

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$
2. $g(t) = (1-5t)^6$
3. $h(u) = (u^3 - 1)(u^2 + 2u - 1)$
4. $g(y) = (\sqrt{y} + 2y)^2$
5. $f(t) = \sin(2t)$
6. $h(x) = \ln(x^2+1)$
7. $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
8. $\varphi(t) = \sin\left(2\sqrt{t}\right)$
9. $\Psi(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$
10. $\Phi(x) = 3^x$

Exercice n° 3: Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$
2. $g(x) = |4x^2 - 1|$
3. $h(t) = t\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$
4. $\varphi(u) = |\ln(u)|$
5. $h(x) = (\cos(3x+1))^4$
6. $f(x) = x^x$
7. $g(u) = \left(\dfrac{3+u}{2u+1}\right)^4$

Exercice n° 4: Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions proposées.

1. $f : x \longmapsto e^{x^2 + 3\sin(x) + 2\sqrt{x}}$
2. $f : x \longmapsto (\cos(x) + 3\sin(x))^8$
3. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$
4. $f : x \longmapsto (2x-1)e^{x^2-1}$
5. $f : x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+3x+2}$
6. $f : x \longmapsto (x+1)\ln(\sqrt{2x+1})$

Exercice n° 5: Déterminer l'ensemble de définition, justifier de la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

a : $x \mapsto x^3\cos(x+1)$

b : $x \mapsto e^{\cos(x)}$

c : $x \mapsto x\ln(x)$

d : $x \mapsto \ln(e^x + 1)$

e : $x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

f : $x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

g : $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

h : $x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

i : $x \mapsto \ln(\cos(2x))$

j : $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

k : $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

l : $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

m : $x \mapsto \ln(\ln(x))$

n : $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$

o : $x \mapsto \ln(1 + \exp(-\dfrac{1}{x}))$

p : $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

q : $x \mapsto \cos x\left(1 + \tan x \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

r : $x \mapsto \sqrt{(x^x)^{2x+1}}$

Exercice n° 6: Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto 2x^3 - 6x^2 + 3$
2. $f : x \longmapsto -8x^5 - 4x^4 - 3$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^7}$
4. $f : x \longmapsto -\dfrac{2(x-1)^2}{x(x+3)}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2x+3}$

Exercice n° 7: Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 y \cos(2x+y) \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 y + x\mathrm{e}^y - 5 + y \end{array} \right.$

Je me perfectionne !

Exercice n° 8:

1. Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles de la fonction $g : (x,y) \longmapsto x^y$.
2. Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles de la fonction $h : (r,\theta) \longmapsto \dfrac{\sqrt{r}\cos(\theta)}{1+r^2}$.
3. Déterminer le domaine de définition de calculer les dérivées partielles de la fonction $k : (s,t) \longmapsto \sqrt{st}$
   Préciser le domaine d'existence des dérivées partielles.

Exercice n° 9: Des fonctions dans les sciences.

1. En météorologie la température ressentie en degré Celcius, T, se calcule de la manière suivante :

$$T(v) = 13,12 + 0,6215\ T_C + (0,3965\ T_C - 11,37) \times v^{0,16}$$

   avec v la vitesse du vent et T_C la température ambiante.
   Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de T.
2. Le taux de saturation Y de l'hémoglobine en oxygène se détermine en fonction de la pression p d'oxygène :

$$Y(p) = \frac{p^{2,8}}{K + p^{2,8}}$$

   où $K > 0$. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de Y.

Exercice n° 10:
Soit f la fonction d'expression

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. (a) Quel est le domaine de dérivabilité de f ?
   (b) Déterminer l'expression de la dérivée de f sur ce domaine.
3. Représenter graphiquement la fonction f sur les intervalles $[-3,0[$ et $[1,3]$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 11: adapté d'un sujet d'ECRICOME.

On considère la fonction f d'expression

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \frac{1}{2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : étude des limites de f

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. (a) Vérifier que pour tout nombre réel x, on a l'égalité

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) - \frac{1}{2}$$

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

Partie B : étude des variations de f et construction de $\mathcal{C}$

On considère la fonction g d'expression

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. (a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3. (a) Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(\mathrm{e}^x\right)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f et ses asympotes.

Remarque. L'une des questions porte sur le théorème de la bijection [1]. On en rappelle l'énoncé :

> Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$). On suppose de plus que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Exercice n° 12:

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction g définie par

$$g(x) = \ln\left(x + 1 - \sqrt{x(x+2)}\right)$$

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 - \sqrt{x(x+2)}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, son domaine de continuité et son domaine de dérivabilité.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$.
2. On étudie maintenant la fonction g.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée et donner le sens de variation de g.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x + 1 + \sqrt{x(x+2)}}\right)$$

   et en déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

1. Celui-ci a été vu en terminale mais portait peut-être un nom différent (*théorème des valeurs intermédiaires renforcé* ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*).