

TD04 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice 1:

Il s'agit ici d'utiliser les propriétés du logarithme :

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln(a^n) = n \ln(a)$ pour $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{R}$.

Se rappeler aussi que le logarithme et l'exponentielle sont des fonctions réciproques si bien que :

$e^{\ln(a)} = a$ pour $a > 0$ et $\ln(e^a) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

On obtient :

$$A = \ln(e^{\frac{3}{2}}) + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

$$B = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$$

$$C = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{e^{\ln(\frac{3}{2})}}{e^{\ln(6)}} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4}$$

Exercice 2:

1. $e^{2x-1} \times e^{-x+3} = e^{x+2}$
2. $(e^{-x+1} \times e^{x-1})^2 = 1$
3. $\frac{e^{3x-1}}{e^{4x+2}} = e^{-x-3}$
4. $\left(\frac{e^{2x+3} \times e^{-3x+2}}{e^4}\right)^{-1} = e^{x-1}$
5. $\ln(8) - \ln(2) = 2 \ln(2)$
6. $\ln(50) + \ln(2) - \ln(10) = \ln(10)$
7. $\ln(e^{2x}) = 2x$
8. $\ln(e^{2x-4}) - \ln(e^{2x+4}) = -8$
9. $\frac{3 \ln(e^{2x+1})}{2 \ln(e^{x-1})} = \frac{6x+3}{2x-2}$
10. $(e^x)^5 e^{-2x} = e^{3x}$
11. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}} = e^2$
12. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = e^{2x} + 1$

Exercice 3:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} &= \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x}}{e^x} \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}} \\ &= e^x \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 &= (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})) \text{ identité remarquable} \\ &= 2 \cdot e^x \cdot 2 \cdot e^{-x} \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} &= \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, On va partir du membre de droite.

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{e^{2x}} &= \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} \\ &= e^{-x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = \frac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \frac{n \ln(10)}{\ln(10)} = n$

2.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{n-1} \leq N < 10^n$. Comme la fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $n-1 \leq \log(N) < n$. D'où par définition de la partie entière $n-1 = \lfloor \log(N) \rfloor$. On obtient bien $n = \lfloor \log(N) \rfloor + 1$. Le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est $n = \lfloor \log(N) \rfloor + 1$.

4. On calcule $\log(2002^{2003}) = 2003 \log(2002) \simeq 6612,8$.

Donc $\lfloor \log(2002^{2003}) \rfloor = 6612$.

Le nombre 2002^{2003} a 6613 chiffres

Exercice 5: Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \iff \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(xy)}{2} \\ &\iff \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \ln(\sqrt{xy}) \\ &\iff \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ car exponentielle est strict. croissant sur } \mathbb{R}. \\ &\iff x+y \geq 2\sqrt{xy} \\ &\iff x-2\sqrt{xy}+y \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ (Toujours Vrai)} \end{aligned}$$

Exercice 6:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = e^x \in \mathbb{R}_+^*$

L'équation devient $X^2 - X - 6 = 0$. Le discriminant est $25 > 0$. L'équation a deux solutions 3 et -2. Revenons à la variable x .

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^x - 6 = 0 &\iff e^x = 3 \text{ ou } e^x = -2 \text{ impossible} \\ &\iff x = \ln(3) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{\ln(3)\}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 &\iff e^{-x}(3e^{2x} - 7 - 20e^x) = 0 \\ &\iff e^{-x}(3e^{2x} - 20e^x - 7) = 0 \\ &\iff 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = e^x \in \mathbb{R}_+^*$

L'équation devient $3X^2 - 20X - 7 = 0$. Le discriminant est $22^2 > 0$. L'équation a deux solutions $-\frac{1}{3}$ et 7. Revenons à la variable x .

$$\begin{aligned} 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0 &\iff e^x = -\frac{1}{3} \text{ (Impossible) ou } e^x = 7 \\ &\iff x = \ln(7) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{\ln(7)\}$

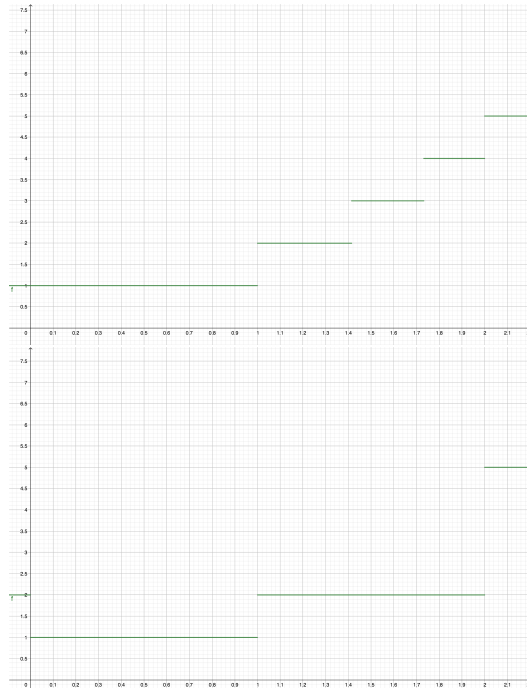
Exercice 7:

- $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ FAUX, on a, par exemple $(2^1)^2 = 4$ et $2^{(1^2)} = 2$.
- $(a^b)^c = a^{bc}$ VRAI, en effet

$$(a^b)^c = \exp(c \ln(a^b)) = \exp(c \ln(\exp(b \ln(a)))) = \exp(cb \ln(a)) = a^{bc}$$

- $a^b a^c = a^{bc}$ FAUX, on a, par exemple, $2^1 \times 2^1 = 4$ et $2^{1 \times 1} = 2$.

- $a^{2b} = (a^b)^2$ VRAI, c'est un cas particulier de la deuxième égalité avec $c = 2$
- $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ FAUX, on a, par exemple $(2 \times 2)^2 = 16$ et $2^{\frac{2}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}} = 4$.
- $(a + b)^c = a^c + b^c$ HORRIBLEMENT FAUX, on a, par exemple, $(1 + 1)^2 = 4$ et $1^2 + 1^2 = 2$.
- $(a^b)^c = (a^c)^b$ VRAI, c'est une conséquence de la deuxième égalité, les deux termes étant égaux à a^{bc} .

Exercice 8:**Exercice 9:**

On utilise ici les quatre propriétés qu'il faut parfaitement maîtriser :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 e^{2x+3} e^{x-4} < 2 &\iff e^{3x-1} < 2 \\
 &\iff 3x - 1 < \ln(2) \text{ car } x \mapsto \ln x \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R}_+^* \\
 &\iff x < \frac{\ln(2) + 1}{3}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\left] -\infty; \frac{\ln(2)+1}{3} \right[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, On détermine le domaine de validité de l'équation. Les polynômes $x^2 + 2$ et $\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4$ n'admettent pas de racines réelles. Donc l'équation est valide sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \ln(2x^2 + 2) - \ln\left(\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4\right) &= \ln(7) \iff \ln\left(\frac{3x^2 + 2}{\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4}\right) = \ln(7) \\
 &\iff \frac{3x^2 + 2}{\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4} = 7 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R} \\
 &\iff \frac{3x^2 + 2}{\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4} - 7 = 0 \\
 &\iff \frac{-14x - 26}{\frac{3}{7}x^2 + 2x + 4} = 0 \\
 &\iff x = -\frac{13}{7}
 \end{aligned}$$

L'unique solution est $-\frac{13}{7}$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 |y^2 + 1| \geq 5 &\iff y^2 + 1 \geq 5 \text{ ou } y^2 + 1 \leq -5 \text{ Impossible} \\
 &\iff y^2 + 1 \geq 5 \\
 &\iff y^2 \geq 4 \\
 &\iff |y| \geq 2 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R}_+ \\
 &\iff y \geq 2 \text{ ou } y \leq -2
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 |3x - 9| \leq 1 &\iff -1 \leq 3x - 9 \leq 1 \\
 &\iff \frac{8}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

donc $x \in \left[\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right]$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 e^{|x^2+2x-3|} = 1 &\iff |x^2 + 2x - 3| = 0 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R} \\
 &\iff x^2 + 2x - 3 = 0 \\
 &\iff (x - 1)(x + 3) = 0 \\
 &\iff x = 1 \text{ ou } x = -3
 \end{aligned}$$

Donc $x \in \{-3, 1\}$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, On recherche le domaine de validité de l'équation :

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$,

$$\begin{aligned}
 \ln(|x^2 + 2x - 3|) \leq 0 &\iff |x^2 + 2x - 3| \leq 1 \text{ car } x \mapsto \ln x \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R}_+^* \\
 &\iff -1 \leq x^2 + 2x - 3 \leq 1 \\
 &\iff x^2 + 2x - 2 \geq 0 \text{ et } x^2 + 2x - 4 \leq 0
 \end{aligned}$$

La résolution de $x^2 + 2x - 2 = 0$ donne $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{3}$ donc $x^2 + 2x - 2 \geq 0$ à l'extérieur des racines.

La résolution de $x^2 + 2x - 4 = 0$ donne $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ donc $x^2 + 2x - 4 \leq 0$ entre les racines.

Ainsi

$$|x^2 + 2x - 3| \leq 1 \quad x \in]-\infty, -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}, +\infty[\text{ et } x \in [-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}]$$

L'intersection des deux ensembles de solutions donne

$$[-1 - \sqrt{5}, -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{5}] \setminus \{-3; 1\}$$

7. Soit $x \in \left] \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$ (pour que $\ln(4 - 3x^2)$ soit bien défini)

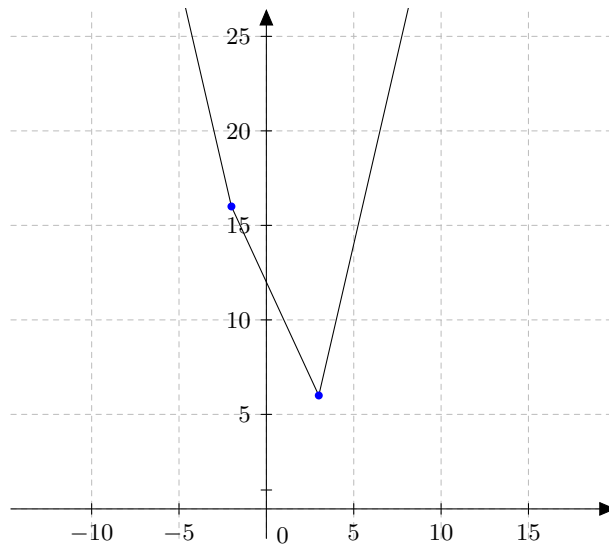
$$\begin{aligned}
 |\ln(4 - 3x^2)| = 0 &\iff \ln(4 - 3x^2) = 0 \\
 &\iff 4 - 3x^2 = 1 \\
 &\quad \text{car la fonction exponentielle est la fonction réciproque du logarithme et } e^0 = 1 \\
 &\iff x^2 = 1 \\
 &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1
 \end{aligned}$$

On a bien $1 \in \left] \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$ et $-1 \in \left] \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$.

Ainsi $x \in \{-1; 1\}$

Exercice 10:

- Pour $x \in]-\infty, -2]$, $f(x) = -4x + 8$
 Pour $x \in]-2, 3]$, $f(x) = -2x + 12$
 Pour $x \in]3, +\infty[$, $f(x) = 4x - 6$
- Représentation graphique :



Je me perfectionne !

Exercice 11:

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que pour $x \in]0, +\infty[$. On se limitera donc à cet ensemble.

Soit $x > 0$, on a alors

$$x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x} \ln(x)) \quad \text{et} \quad \sqrt{x}^x = \exp(x \ln(\sqrt{x})) = \exp\left(\frac{x}{2} \ln(x)\right)$$

La fonction exponentielle étant bijective, notre équation est alors équivalente à l'équation

$$\sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x)$$

x étant strictement positif, on peut multiplier par $\frac{1}{\sqrt{x}}$ de part et d'autre de notre équation. En multipliant par 2 et en passant tous les termes d'un côté on aboutit alors à l'équation

$$\ln(x) (\sqrt{x} - 2) = 0$$

C'est-à-dire

$$\ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 2$$

Les solutions de cette équation sont 1 et 4.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ est $\{1, 4\}$.

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$

On va travailler par analyse-synthèse. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de cette équation. Posons $y = \exp(x) > 0$. y vérifie alors $y + \frac{e}{y} = e + 1$. Ainsi, y vérifie $y^2 - (e + 1)y + e = 0$, c'est-à-dire $(y - e)(y - 1) = 0$.

On a donc $x \in \{1, e\}$, d'où $x \in \{0, 2\}$.

Il est ensuite aisé de vérifier que 0 et 1 sont bien des solutions de l'équation $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $e^x + e^{1-x} = e + 1$ est $\{0, 1\}$.

3. $(x^2)^x = x^{(x^2)}$

Remarquons d'abord que cette équation n'a de sens que pour $x \in]0, +\infty[$. On se limitera donc à cet ensemble.

Soit $x > 0$, on a alors

$$(x^2)^x = x^{2x} = \exp(2x \ln(x)) \quad \text{et} \quad x^{(x^2)} = \exp(x^2 \ln(x))$$

La fonction exponentielle étant bijective, notre équation est alors équivalente à l'équation

$$2x \ln(x) = x^2 \ln(x)$$

C'est-à-dire

$$x(x - 2) \ln(x) = 0$$

On voit facilement que l'ensemble des solutions de l'équation $(x^2)^x = x^{(x^2)}$ est $\{1, 2\}$.

$$4. \quad 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Notre équation est équivalente à

$$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

C'est-à-dire

$$4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Voire encore

$$\exp\left(x \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}}$$

Finalement on aboutit à

$$x \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = 3 \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)$$

D'où

$$x = \frac{3 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3)}{2 \ln(2) - \ln(3)} = \frac{6 \ln(2) - 3 \ln(3)}{4 \ln(2) - 2 \ln(3)}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ est donc $\left\{\frac{6 \ln(2) - 3 \ln(3)}{4 \ln(2) - 2 \ln(3)}\right\}$

Exercice 12:

1. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

On cherche à encadrer $2^{43112609}$ entre 2 puissance de 10. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^{n-1} < 2^{43112609} \leq 10^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} 10^{n-1} < 2^{43112609} \leq 10^n &\iff \ln(10^{n-1}) < \ln(2^{43112609}) \leq \ln(10^n) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ strictement croissant sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff (n-1) \ln(10) < \ln(2^{43112609}) \leq n \ln(10) \end{aligned}$$

On calcul le logarithme décimale de $2^{43112609}$ (à la calculatrice) et on trouve $n = 12978189$.

2. Démontrer que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\log_{10} 2$ est rationnel.

Donc il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$

On a donc $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q}$

Et par conséquent $q \ln(2) = p \ln(10)$

D'où $2^q = 10^p$.

Ce qui implique $2^{q-p} = 5^p$.

On trouve $p = q = 0$. Contradiction.

Par l'absurde, on a montré que $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Exercice 13:

1. L'équation est valide si et seulement si $x \neq -2$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{e^{x+2}} < e^2 &\iff \frac{x-1}{x+2} < 2 \text{ car } \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+2}} > 0 \\ e^2 > 0 \\ x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\ &\iff \frac{x-1}{x+2} - 2 < 0 \\ &\iff \frac{-x-5}{x+2} < 0. \end{aligned}$$

On est ramené à l'étude du signe d'un quotient. L'ensemble des solutions est $] -\infty, -5[\cup] -2, +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e &\iff e^{2x+1-(x-3)} = e \\ &\iff e^{x+4} = e \end{aligned}$$

Comme $e^{x+4} > 0$, $e > 0$ et que $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e &\iff x + 4 = 1 \\ &\iff x = -3 \end{aligned}$$

On trouve une unique solution $x = -3$.

3. Notons $\mathcal{D}$ le domaine de validité de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 2x + 11 > 0 \end{cases} \iff x > 2.$$

Le domaine de validité est $\mathcal{D} =]2; +\infty[$.

Soit $x \in]2; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11) &\iff \ln((x+2)(x-2)) = \ln(2x+11) \\ &\iff (x+2)(x-2) = (2x+11) \text{ car } x \mapsto e^x \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\ &\iff x^2 - 2x - 15 = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation est $x = 5$.

Dans la suite, la rédaction n'est pas détaillée et est donc insuffisante. Les résultats sont donnés à titre indicatif.

4. Le domaine de validité de l'inéquation est $]3, +\infty[$. L'ensemble des solutions est $\left]3, \frac{3e+1}{e-2}\right]$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x + 1 > 0$. L'ensemble des solutions est $] -\infty, -1[$.
6. Le domaine de validité de l'inéquation est $] -\infty, -e[\cup]e, +\infty[$. L'ensemble de solutions de l'inéquation est $[-\sqrt{2}e, -e[\cup]e, \sqrt{2}e]$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} + 1 > 0$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}_-^*$.
8. Tout d'abord, le domaine de validité de l'équation $\mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ (car on doit avoir $|x+1| > 0$ et $|2x+1| > 0$). Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$. On utilise les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) = \ln(2) &\iff \dots \iff \ln\left(\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\right) = \ln(2) \\ &\iff \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| = 2 \\ &\iff \frac{x+1}{2x+1} = 2 \text{ ou } \frac{x+1}{2x+1} = -2 \end{aligned}$$

où l'avant-dernière équivalence provient du fait que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On résout les deux équations quotients et on trouve que les solutions de l'équation sont $\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{1}{3}\right\}$.

9. Remarquons que les valeurs $\frac{1}{4}$ et -3 ne peuvent pas être solution de l'équation (à cause de $\ln$). En utilisant le fait que $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on trouve que l'équation est équivalente à $|4x-1| < e|x+3|$. On étudie ensuite le signe de $4x-1$ et $x+3$ suivant les valeurs de x et on trouve que l'ensemble des solutions est $\left]\frac{1-3e}{4+e}, \frac{1+3e}{4-e}\right[\setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

10. **Domaine de validité :** soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation est valide si et seulement si $\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} > 0$.

Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 2$ est 9. L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ a deux solutions 1 et -2. De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

Le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$	
$2x^2 + 3x$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Le domaine de validité de l'équation est : $\mathcal{D} =]-\infty ; -2[\cup]-\frac{3}{2} ; 0[\cup]1 ; +\infty[$.

Soit $x \in \mathcal{D}$,

$$\ln\left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}\right) - \ln(2) > 0 \iff \ln\left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}\right) > \ln(2) \quad (1)$$

$$\iff \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} > 2 \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$\iff \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2} > \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} \quad (3)$$

$$\iff \frac{x + 4}{x^2 + x - 2} > 0 \quad (4)$$

Effectuons un tableau de signe afin de résoudre cette inégalité.

x	$-\infty$	-4	-2	1	$+\infty$	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x^2 + x - 2$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x^2 + 3x}{x^2 + x - 2}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-4 ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.