

Corrigé du Devoir Maison 3

Exercice 1.

1. L'expression de g se réécrit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{x \ln(1+2x)}$. Cherchons le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g .

Soit $x \in \mathbb{R}$,

g est définie en $x \iff x \mapsto x \ln(1+2x)$ est définie en x , car exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x \mapsto 1+2x \text{ est définie en } x \\ 1+2x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad \text{car le logarithme est défini sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\iff x > -\frac{1}{2}$$

Donc le domaine de définition est : $\mathcal{D}_g = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Soit $x \in \mathcal{D}_g$,

g est dérivable en x si $x \mapsto x \ln(1+2x)$ est dérivable en x , car exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{si } \begin{cases} x \mapsto 1+2x \text{ est dérivable en } x \\ 1+2x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad \text{car le logarithme est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{si } x > -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[}$$

et :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[, \quad g'(x) = \left(\ln(1+2x) + \frac{2x}{1+2x} \right) (1+2x)^x$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$h \text{ est définie en } x \iff \begin{cases} x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \text{ est définie en } x \\ \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad \text{car la racine carrée est définie sur } \mathbb{R}_+$$

$$\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ (quotient de fonction affine.)} \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

On étudie le signe de $\frac{x-1}{x+1}$ à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

Donc $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On étudie maintenant la dérivabilité de h . Soit $x \in \mathcal{D}_h$,

$$h \text{ est dérivable en } x \text{ si } \begin{cases} x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \text{ est dérivable en } x \\ \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases} \quad \text{car la racine carrée est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{si } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ (quotient de fonction affine.)} \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est dérivable sur }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

et :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad h'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}}}$$

Exercice 2.

1. L'inéquation est valide si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Soit $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Alors

- ★ Si $x \in]-\infty, -1]$, alors $x-1 < 0$ et comme $\sqrt{x^2-1} \geq 0$, tous les x de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sont solutions.
- ★ Supposons maintenant que $x \in [1, +\infty[$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\sqrt{x^2-1} \geq 0$ et $x-1 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} > x-1 &\iff (\sqrt{x^2-1})^2 > (x-1)^2 \\ &\iff x^2-1 > x^2-2x+1 \\ &\iff x > 1 \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est }]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \text{ est définie en } x &\iff \begin{cases} x \mapsto \sqrt{x^2-1} + 1 - x \text{ est définie en } x \\ \sqrt{x^2-1} + 1 - x > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\text{ d'après la question précédente} \\ \sqrt{x^2-1} > x-1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\text{ d'après la question précédente} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$

(b) On utilise la structure conditionnelle if/else :

```
def f(x):
    if ((x<=-1) or (x>1)) :
        return f(x)
    else :
        return ('erreur mauvaise valeur')
```

(c) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ donc par somme : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$ car

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2-1} + 1 - x = 0^+$ donc comme $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty}$.

On utilise l'expression conjuguée pour trouver la limite en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 \forall x > 1, \quad \sqrt{x^2 - 1} + 1 - x &= \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x)(\sqrt{x^2 - 1} - 1 + x)}{\sqrt{x^2 - 1} - 1 + x} \\
 &= \frac{x^2 - 1 - (1 - x)^2}{\sqrt{x^2 - 1} - 1 + x} \\
 &= \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 1} - 1 + x} \\
 &= \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} - 1 + x} \\
 &= \frac{2x - 2}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 + x} \\
 &= \frac{2x - 2}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} + 1)} \\
 &= \frac{2 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} + 1}
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$. De plus, $f(-1) = \ln(2)$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 f \text{ est dérivable en } x &\quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} + 1 - x \text{ est dérivable en } x \\ \sqrt{x^2 - 1} + 1 - x > 0 \end{cases} \\
 &\quad \text{si} \quad \begin{cases} x \mapsto 1 - x \text{ est dérivable en } x \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} \text{ est dérivable en } x \\ \sqrt{x^2 - 1} > x - 1 \end{cases} \\
 &\quad \text{si} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1 \text{ est dérivable en } x \\ x^2 - 1 > 0 \text{ car la fonction racine carrée est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\text{ d'après la question 1} \end{cases} \\
 &\quad \text{si} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement f est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x)}$$

(b) L'inéquation est valide si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Alors

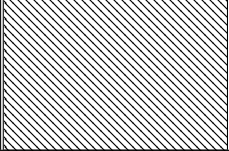
- ★ Si $x \in]-\infty, -1]$, alors $x < 0$ et comme $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$, aucune valeur de cet intervalle
- ★ Supposons maintenant que $x \in [1, +\infty[$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 - 1} \leq x &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 1})^2 \leq (x)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x^2 \\
 &\Leftrightarrow -1 \leq 0 \text{ (toujours vrai)}
 \end{aligned}$$

Ainsi toutes les valeurs de l'intervalle $[1, +\infty[$ sont solutions.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1, +\infty[$.

- i. On sait que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $x - \sqrt{x^2 - 1}$ et de $\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x$. D'après la question 2. (a), on a $\sqrt{x^2 - 1} + 1 - x > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - \sqrt{x^2 - 1}$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
f	$+\infty$ ↘ $\ln(2)$			$-\infty$ ↗ $+\infty$