Corrigé du Devoir Maison 2

Problème 1 : Une équation de degré 3

On étudie l'équation :

$$(\heartsuit) \quad 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Partie A — Localisation des racines

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x - 1)(2x + 1)$.
   On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

   On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 \left(4 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2x^3}\right) = \pm\infty$.
   De plus, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$ donc pour tout $x \leq -1$: $f(x) \leq f(-1) \Longleftrightarrow f(x) \leq -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow f(x) < 0$ donc $\boxed{\text{l'équation } (\heartsuit) \text{ n'admet pas de solution sur l'intervalle }]-\infty;-1].}$

3. f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq f(1) \Longleftrightarrow f(x) \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow f(x) > 0$. Donc $\boxed{\text{l'équation } (\heartsuit) \text{ n'admet pas de solution sur l'intervalle } [1;+\infty[.}$

4. **Étude sur l'intervalle** $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$**.** La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$. De plus, $f\left(\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]\right) = \left[-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Comme $-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0 < 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a $0 \in f\left(\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]\right)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ (autrement dit l'équation $(\heartsuit)$) admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

   Étude sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$**.** La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. De plus, $f\left(\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right) = \left[-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Comme $-1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0 < 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a $0 \in f\left(\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $(\heartsuit)$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Étude sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$. De plus, $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)=\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{2};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Comme $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}<0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $0\in f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation ($\heartsuit$) admet une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Finalement, $\boxed{\text{l'équation } (\heartsuit) \text{ admet exactement trois solutions dans l'intervalle } [-1,1]}$.

5. Soit $x\in\mathbb{R}$. On suppose que x est solution de ($\heartsuit$). D'après les questions 2., 3. et 4. de la **Partie A**, on sait que $x\in[-1,1]$. La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $\cos(\mathbb{R})=[-1,1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta)=x$. Donc

$$\boxed{\text{pour toute solution } x \text{ de } (\heartsuit), \text{ il existe } \theta\in\mathbb{R} \text{ tel que } x=\cos(\theta)}$$

Partie B — Formules trigonométriques

1. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

   $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Partie C — Résolution trigonométrique

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\cos(3\theta)=\cos(2\theta+\theta)&=\cos(2\theta)\cos(\theta)-\sin(2\theta)\sin(\theta)\\&=(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))\cos(\theta)-\sin(\theta)\times 2\sin(\theta)\cos(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-\sin^2(\theta)\cos(\theta)-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-3(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta)\\&=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)+3\cos^3(\theta)\\&=\boxed{4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)}\end{aligned}$$
2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Soit $x=\cos(\theta)$.

   En utilisant la question 1 de la partie C et le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient :

   x est solution de ($\heartsuit$) ssi $4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $\cos(3\theta)=\cos(\frac{\pi}{4})$.
3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\cos(3\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)&\iff 3\theta=\frac{\pi}{4}\bmod 2\pi \text{ ou } 3\theta=-\frac{\pi}{4}\bmod 2\pi\\&\iff \theta=\frac{\pi}{12}\bmod\frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta=-\frac{\pi}{12}\bmod\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$
4. On en déduit $x=\cos(\theta)$ avec θ ci-dessus. Les trois solutions réelles distinctes correspondent à trois valeurs de $\cos$ distinctes dans $[0,2\pi[$. Ainsi :

$$x_1=\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\cos\left(\tfrac{9\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_3=\cos\left(\tfrac{17\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2 (Facultatif)

1. Pour $(a, b) = (1, 0)$ on a $|a| + |b| = 1$ et $a - b = 1$, donc $1 \in F$. D'après l'inégalité triangulaire on a, $|a| + |b| \geq |a - b| = 1$, donc $0 \notin F$.

2. Pour $(a, b) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. On a : $a - b = 1$, $|a| + |b| = 2$. Donc $2 \in F$. D'après l'inégalité triangulaire on a, $|a| + |b| \geq |a - b| = 1$, donc $\dfrac{1}{2} \notin F$.
3. Pour $(a, b) = (3, 2)$ on a $5 \in F$.
4. Soit $(a, b) \in F$, d'après l'inégalité triangulaire on a, $|a| + |b| \geq |a - b| = 1$. Donc F est minoré par 1.
5. (a) Soit $x \geq 1$, on prend $a = \frac{x+1}{2}$, $b = a - 1 = \frac{x-1}{2}$.
   Alors $a - b = 1$ et $|a| + |b| = a + b = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = x$.

   (b) D'après la question précédente, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x \in F$. Donc $[1, +\infty[\subset F$.

   (c) $[1, +\infty[$ n'es pas majorée et $[1, +\infty[\subset F$. Donc F n'est pas majoré.
6. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|a| + |b| < 1$,
   alors d'après l'inégalité triangulaire $a - b \leq |a - b| \leq |a| + |b| < 1$.

   (b) Soit $x \in F$.
   Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a - b = 1$ et $|a| + |b| = x$. Supposons par l'absurde que $x < 1$ alors d'après la question précédente on a $1 = a - b < 1$. Contradiction. Donc $x \in [1, +\infty[$
   On a montré que $F \subset [1, +\infty[$.
7. On a montré les deux inclusions donc $F = [1, +\infty[$.