

Devoir Maison 2

- Soignez la présentation.
- Vos conclusions doivent toujours être encadrées.

Problème 1 : Une équation de degré 3

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (\heartsuit)$$

Partie A — Localisation des racines de $(\heartsuit)$

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Montrer que l'équation $(\heartsuit)$ n'admet pas de solution sur $] -\infty; -1]$.
3. Étudier le signe de f sur $[1; +\infty[$ et en déduire si une solution existe sur cet intervalle.
4. Justifier à l'aide du théorème de la bijection que $(\heartsuit)$ admet une unique solution dans chacun des intervalles $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$.
5. Justifier alors que si x est une solution de $(\heartsuit)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction cosinus.

Partie B — Formules trigonométriques

1. En utilisant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et les formules trigonométriques usuelles, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Partie C — Résolution trigonométrique

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant que $3\theta = 2\theta + \theta$, montrer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $x = \cos(\theta)$ est solution de $(\heartsuit)$ si et seulement si $\cos(3\theta) = \cos(\frac{\pi}{4})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3\theta) = \cos(\frac{\pi}{4})$.
4. En déduire l'ensemble des solutions réelles de $(\heartsuit)$.

Théorèmes utiles (rappel)

Théorème de la bijection : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Théorème des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 2 (Facultatif)

On considère les ensembles

$$E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b = 1\} \text{ et } F = \{|a| + |b| \mid (a, b) \in E\}.$$

1. Montrer que $1 \in F$ et que $0 \notin F$.
2. Montrer que $2 \in F$ et que $\frac{1}{2} \notin F$.
3. Donner un autre élément de F et justifier.
4. Justifier que F est minoré.
5. (a) Soit $x \geq 1$. Trouver $(a, b) \in E$ tel que $x = |a| + |b|$.
(b) En déduire qu'un intervalle à préciser est inclus dans F .
(c) F est-il majoré? Justifier.
6. (a) Montrer : $|a| + |b| < 1 \implies a - b < 1$.
(b) En déduire que $F \subset [1, +\infty[$.
7. Conclure.