

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Ecrire les sommes en utilisant le symbole $\sum$.

1. $A = 1 + 2 + \dots + 50$
2. $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$
3. $C = \ln(3) + \ln(4) + \dots + \ln(70)$
4. $D = \cos(\pi) + \cos(3\pi) + \cos(5\pi) + \dots + \cos((2n+1)\pi)$
5. $E = 6 + 8 + 10 + \dots + 2n$

Exercice n° 2: Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{llll} A = \sum_{k=0}^{10} 1 & B = \sum_{k=1}^{100} 2k & C = \sum_{k=15}^{100} k & D = \sum_{k=2}^{17} 2^k \\ E = \sum_{k=1}^{10} k^2 & F = \sum_{k=10}^{20} k^2 & G = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{4^k} & H = \sum_{k=2}^2 k^5 \end{array}$$

Exercice n° 3: Dans cet exercice, i, j, n sont trois entiers positifs non nuls avec $i \leq j$ et x un réel. Calculer les expressions suivantes.

$$A = \sum_{k=i}^j (j-k+2^k) \quad B = \sum_{k=0}^n \frac{2 \times 3^k}{5^{k+1}} \quad C = \sum_{k=0}^n (n-k+1)^2 \quad D = \sum_{k=0}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) \quad E = \sum_{k=0}^n e^{2k+1}$$

Exercice n° 4: Factoriser les expressions suivantes.

$$A = x^n - 1 \quad B = \frac{1}{2^n} - x^{2n} \quad C = 1 - 3^{2n}$$

Exercice n° 5: Démontrer la formule suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice n° 6: Calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{lll} A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^k & B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} & C = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{3^k} \\ D = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & E = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} & F = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \end{array}$$

Exercice n° 7: Calculer les sommes doubles suivantes.

$$\begin{array}{llll} A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 & B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) & C = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3 & D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2^{i-j} \\ E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) & F = \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \binom{p}{k} 3^k & G = \sum_{0 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell+1} & H = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \times j \end{array}$$

Exercice n° 8: Ecrire les produits en utilisant le symbole $\prod$.

1. $A = 7 \times 8 \times \dots \times 150$
2. $B = e^2 \times e^4 \times \dots \times e^{2n}$
3. $C = (X - a_1)^{\alpha_1} \times (X - a_2)^{\alpha_2} \times \dots \times (X - a_p)^{\alpha_p}$

Exercice n° 9:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants.

$$A = \prod_{k=1}^9 (-1) \quad B = \prod_{k=1}^n 3^2 \quad , \quad C = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+3}{k+5} \right) \quad , \quad D = \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n}\right) \quad , \quad E = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice n° 10: Ecrire avec des factorielles les expressions suivantes.

$$A = \prod_{k=n}^{2n} k \quad B = \prod_{k=1}^n (2k) \quad C = \prod_{i=1}^n i^2 \quad D = \prod_{i=1}^n (2i+1) \quad E = \sum_{k=1}^n \ln(3k)$$

Je me perfectionne !

Exercice n° 11:

On pose $S = \sum_{k=0}^{80} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
2. En déduire une autre écriture de S et calculer la valeur exacte de S .

Exercice n° 12: Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Établir qu'il existe 3 réels a, b et c tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on ait $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice n° 13: Somme d'inégalités

1. Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq S_n \leq 2$.

Exercice n° 14: Somme et dérivation

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{i=0}^n x^i$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant la fonction f , calculer la somme $\sum_{i=1}^n ix^{i-1}$. En déduire $\sum_{i=1}^n ix^i$.
3. En déduire une autre expression de $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$.

Exercice n° 15:

Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant apparaître une somme télescopique, calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n k k!$

Exercice n° 16: Sommes d'indices pairs et impairs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

1. Montrer que $P_n + I_n = 2^{2n}$ et $P_n - I_n = 0$.
2. En déduire les valeurs de P_n et I_n .

Exercice n° 17:

1. Ecrire la somme suivante en extension et en déduire sa valeur : $\sum_{k=0}^7 10^k$
2. Calculer alors $A = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{111\dots 1111}_{n \text{ fois}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 18:

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère l'expression :

$$A = (x+1)^n$$

1. Écrire en langage **python** une fonction récursive **puissance** qui prend en entrée les paramètres **x** et **n** et qui calcule $(x + 1)^n$.
2. Dans cette question seulement, on suppose que $x \in \mathbb{R}_+^*$. Écrire en langage **python** une fonction **dépasse** qui prend en paramètres le nombre réel **x** et un entier naturel **M** et qui renvoie la plus petite valeur de **n** pour laquelle $(x + 1)^n > M$.
3. Développer $(x + 1)^n$.
4. Intégrer l'égalité de la question précédente entre 0 et 1 puis en déduire la valeur de la somme :

$$S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice n° 19:

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A : calcul de $\sum_{k=0}^n k2^{k-1}$

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} 2^k$.

1. Pour tout entier naturel n , écrire la somme double u_n de deux manières différentes.
2. Montrer que pour tout $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leq n$, on a $\sum_{k=i}^n 2^k = 2^{n+1} - 2^i$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = n2^{n+1} + 1$.
4. Écrire en **python** une fonction **suite** qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n .
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'autre écriture de u_n montrer qu'on a aussi $u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k$.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

Partie B : calcul de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

Soit n un entier naturel non nul.

1. Proposer en **python** une fonction récursive **factorielle** prenant en paramètre un entier naturel n et renvoyant la valeur de $n!$.
2. Rappeler les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.
3. Montrer que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
4. Montrer que pour tous entiers naturels k et n supérieurs ou égaux à 2 tels que $k \leq n$, on a $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$.
5. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.