

DEVOIR SURVEILLÉ 2

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés ne seront pas pris en compte dans la notation.
- Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$.
3. $\ln(|2x - 3|) - \ln(|x + 4|) = \ln(3)$.

Exercice 2.

Pour chacune des fonctions d'expressions suivantes, déterminer son **domaine de définition**, les **limites** aux bornes du domaine de définition et son **domaine de dérivabilité** puis calculer sa fonction **dérivée**.

1. $g(x) = (5 + x)^x$
2. $h(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (\sin(x))^2$.

1. Ecrire une fonction `python` qui prend x en paramètre et renvoie $f(x)$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq f(x) \leq x + 1$.
(b) En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin(x))^2}{x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \sin(2x)$.
(c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
(d) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0, \pi]$.
4. Tracer le graphe de f sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ en faisant apparaître les tangentes horizontales.

Problème 1.

On considère les fonction suivantes

$$f : x \mapsto \ln(x + e^{-x}) \text{ et } g : x \mapsto x + e^{-x}.$$

1. Un peu de python

- (a) Écrire une fonction `gpositive` qui prend en entrée un réel `x` et renvoie `True` si $g(x)$ est strictement positif et `False` sinon.
- (b) Écrire une fonction `domainedef` qui prend en entrée un réel `x` et renvoie un message d'erreur si `x` n'est pas dans l'ensemble de définition de f et renvoie l'image de `x` par la fonction f sinon. Cette fonction devra utiliser la fonction `gpositive` de la question précédente.

2. Etude de g

- (a) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

3. Ensemble de définition de f et limite.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -x + \ln(xe^x + 1)$.
- (c) Déterminer les limites de f aux bords du domaine de définition. Donner les équations des éventuelles asymptotes.

4. Etude des variation de f

- (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
- (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathcal{D}_f$.
- (c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 2.

On considère la fonction f d'expression

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}}}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x \geq \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}}.$$

2. En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

3. Écrire en langage `python`, une fonction qui prend en entrée un réel `x` et retourne `True` si la valeur choisie appartient au domaine de définition de f et `False` sinon.

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.