

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\iff 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \cos(x) - \sqrt{3} \sin x = 1 &\iff 2\left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x)\right) = 1 \\
 &\iff \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = \frac{1}{2} \\
 &\iff \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
 &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
 &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation est valide si et seulement si $2x - 3 \neq 0$ et $x + 4 \neq 0$, car le logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned}
 \ln(|2x - 3|) - \ln(|x + 4|) = \ln(3) &\iff \ln\left(\frac{|2x - 3|}{|x + 4|}\right) = \ln(3) \\
 &\iff \left|\frac{2x - 3}{x + 4}\right| = 3 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\
 &\iff \frac{2x - 3}{x + 4} = 3 \text{ ou } \frac{2x - 3}{x + 4} = -3 \\
 &\iff 2x - 3 = 3x + 12 \text{ ou } 2x - 3 = -3x - 12 \\
 &\iff x = -15 \text{ ou } x = \frac{-9}{5}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{-15; \frac{-9}{5}\right\}.$$

Exercice 2.

1. Réécrivons $g(x) = e^{x \ln(5+x)}$. La fonction exponentielle et la fonction $x \mapsto x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction g est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x+5 > 0$ et dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si $x+5 > 0$.

Donc g est définie et dérivable sur $] -5, +\infty[$. Pour tout $x \in] -5, +\infty[$,

$$g'(x) = \left(\ln(x+5) + \frac{x}{5+x} \right) e^{x \ln(5+x)}$$

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+5) = +\infty$ et donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -5} \ln(x+5) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -5} x \ln(x+5) = +\infty$. Donc par composition $\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = +\infty$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

La fonction h est définie en $x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$ car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$

Les racines de $x^2 - 5x + 4$ sont 1 et 4. Le coefficient dominant étant positif, $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty, 1[\cup]4, +\infty[$. Donc la fonction h est définie sur $] -\infty, 1[\cup]4, +\infty[$.

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition la fonction h est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si $x^2 - 5x + 4 > 0$.

Donc h est dérivable sur $] -\infty, 1[\cup]4, +\infty[$. Pour tout $x \in] -\infty, 1[\cup]4, +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 4 = x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5x + 4 = +\infty$. Donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5x + 4 = 0$ et le polynôme est positif sur $] -\infty, 1[\cup]3, +\infty[$. Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

Exercice 3.

1.

```
from math import *
def f(x):
    return x+(sin(x))*2
```

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin^2(x) \leq 1 \quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow x \leq x + \sin^2(x) \leq x + 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq f(x) \leq x + 1$$

- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x+1$, alors d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$, alors d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin^2(x) \leq 1 \quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{car } x > 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sin(x))^2}{x} + 1 = 1$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = x+\pi + (\sin(x+\pi))^2 = x+\pi + (-\sin(x))^2 = x+\pi + (\sin(x))^2 = f(x) + \pi$.
- (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction polynomiale et puissance d'une fonction sinus.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + \sin(2x)$.
- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\iff 1 + \sin(2x) = 0 \\
 &\iff \sin(2x) = -1 \\
 &\iff \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
 &\iff 2x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi + \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
 &\iff x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{3\pi}{4}[\pi] \\
 &\iff x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

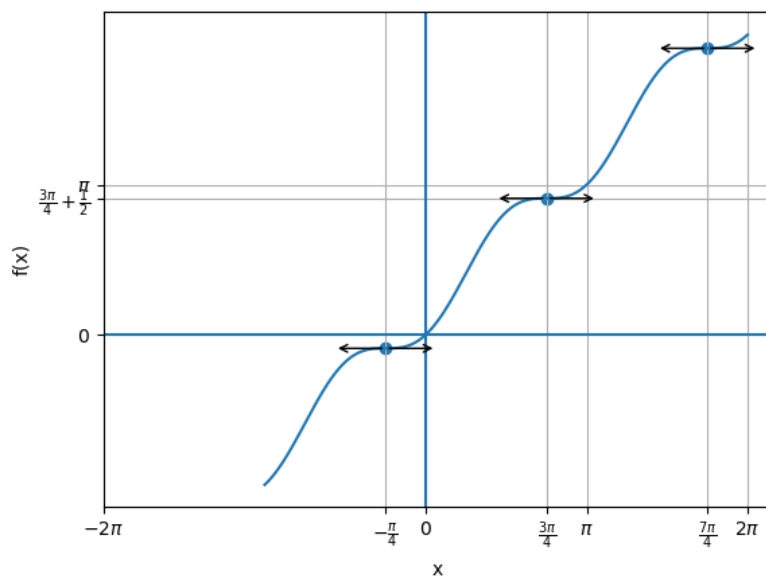
- (d) Pour tout $x \in [0, \pi]$, $-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \iff 0 \leq 1 + \sin(2x) \leq 2 \iff 0 \leq f'(x) \leq 2$.

A l'aide de la question précédente, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$		0	
f	0	$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$	π

$$\text{On a } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} + \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

4. On obtient le graphe suivant :



Problème 1.

1. (a)
- ```

from math import *
def gpositive(x):
 if x+exp(-x)>0:
 return True

```

```

else:
 return False

```

```

(b) def domainedef(x):
 if gpositive(x):
 return log(x+exp(-x))
 else:
 return "erreur"

```

2. (a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée,  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - e^{-x}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-x} > 0 &\iff 1 > e^{-x} \\
 &\iff 0 > -x, \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
 &\iff x > 0
 \end{aligned}$$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $g$     | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

En effet,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + 1)e^{-x} = +\infty$  par croissance comparée

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty$ .

Enfin on a  $g(0) = 1$ .

(b) D'après la question précédente, la fonction  $g$  est décroissante sur  $]-\infty; 0]$  et croissante sur  $[0; +\infty[$ . Comme  $g(0) > 0$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ .

3. (a) La fonction logarithme est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et d'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ . Donc par composition la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \ln(x + e^{-x}) &= \ln((xe^x + 1)e^{-x}) \\
 &= \ln(xe^x + 1) + \ln(e^{-x}) \\
 &= \ln(xe^x + 1) - x
 \end{aligned}$$

On a montré que pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + \ln(xe^x + 1)$ .

(c) Par croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + 1) - x = +\infty$ .

On remarque que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + 1) = 0$ . Donc la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = -x$  en  $-\infty$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

4. (a) La fonction logarithme est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et d'après la question 2.(b), pour tout  $x \in \mathbb{R}, x + e^{-x} > 0$ . Donc par composition la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}.$$

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , d'après la question 2.(b),  $f'(x)$  est du signe de  $g'(x)$ . On obtient donc les variations suivantes.

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f$     | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

- (c) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On a de plus  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .  
Comme  $1 \in [0; +\infty[$ , on a d'après le théorème de la bijection que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Problème 2.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  :

Domaine de validité : L'équation est valide si et seulement si  $\frac{x^3 - 4x}{x - 1} \geq 0$  et  $x \neq 1$  car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

Or  $\frac{x^3 - 4x}{x - 1} = \frac{(x^2 - 4)x}{x - 1} = \frac{(x - 2)(x + 2)x}{x - 1}$ . On dresse le tableau de signe :

$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ ,  $x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$  puisque  $x^2 - 4$  est un polynôme du second degré de coefficient dominant positif et de racines  $-2$  et  $2$ .

|                          |           |      |     |     |     |           |
|--------------------------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$                      | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $x$                      | $-$       | $-$  | $0$ | $+$ | $+$ | $+$       |
| $x^2 - 4$                | $+$       | $0$  | $-$ | $-$ | $0$ | $+$       |
| $x - 1$                  | $-$       | $-$  | $-$ | $+$ | $+$ | $+$       |
| $\frac{x^3 - 4x}{x - 1}$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ | $+$       |

On résout donc sur  $] -\infty; -2] \cup [0; 1[ \cup [2; +\infty[$ .

Soit  $x \in ] -\infty; -2] \cup [0; 1[ \cup [2; +\infty[$ .

- Si  $x < 0$  l'inéquation n'admet pas de solution puisque pour tout  $x \in ] -\infty; -2] \cup [0; 1[ \cup [2; +\infty[$ ,

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \geq 0$$

- Si  $x \geq 0$ .

$$x \geq \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{x^3 - 4x}{x - 1}$$

car la fonction  $x \mapsto x^2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ,

$$x \geq 0 \text{ et } \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - \frac{x^3 - 4x}{x - 1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 - x^3 + 4x}{x - 1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x}{x - 1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(4 - x)}{x - 1} \geq 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe du quotient à l'aide d'un tableau de signe :

| $x$                  | 0 | 1 | 4 | $+\infty$ |
|----------------------|---|---|---|-----------|
| $4 - x$              |   | + | + | 0         |
| $x - 1$              |   | - | + | +         |
| $\frac{x(4-x)}{x-1}$ | 0 | - | + | 0         |

Donc

$$x \geq \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \Leftrightarrow x \in [1, 4] \cup \{0\}$$

Mais comme on résout sur  $] -\infty; -2] \cup [0; 1[ \cup [2; +\infty[$ , l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}^+$  est  $[2, 4] \cup \{0\}$ .  
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation sur  $\mathbb{R}$  est  $[2, 4] \cup \{0\}$ .

2. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{La fonction } f \text{ est définie en } x &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \sqrt{\frac{x_0^3 - 4x_0}{x_0 - 1}} \geq 0 \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x - \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \text{ est définie en } x_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in [2, 4] \cup \{0\} \\ x_0 \neq 1 \\ x_0 \in ] -\infty; -2] \cup [0; 1[ \cup [2; +\infty[ \end{cases} \end{aligned}$$

en utilisant les résultats de la question précédente.

Donc  $f$  est définie sur  $\mathcal{D}_f = [2, 4] \cup \{0\}$ .

3. 

```
def fonction (x):
 if (x==0) or (x<=4 and x>=2):
 return True
 else:
 return False
```

4. Soit  $x_0 \in [2, 4] \cup \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{La fonction } f \text{ est dérivable en } x_0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - \sqrt{\frac{x_0^3 - 4x_0}{x_0 - 1}} > 0 \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x - \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}} \text{ est dérivable en } x_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in [2, 4[ \text{ d'après la question 1.} \\ x_0 - 1 \neq 0 \\ \frac{x_0^3 - 4x_0}{x_0 - 1} > 0 \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in [2, 4[ \\ x_0 \in ] -\infty; -2[ \cup ]0; 1[ \cup [2; +\infty[ \text{ d'après la question 1.} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve que  $f$  est dérivable sur  $]2, 4[$ .

Et pour tout  $x \in ]2, 4[$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}}}} \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x - 1}}} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{(x - 1)^2} \right).$$