

TD07 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice 1:

$$1. A = 1 + 2 + \dots + 50 = \sum_{k=1}^{50} k.$$

Remarque : on peut la calculer, $A = \frac{50 \times 51}{2} = 25 \times 51 = 1275$.

$$2. B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} = \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{i}$$

$$3. C = \ln(3) + \ln(4) + \dots + \ln(70) = \sum_{k=3}^{70} \ln(k)$$

Remarque on a aussi $C = \ln(3 \times 4 \times \dots \times 69 \times 70) = \ln\left(\prod_{k=3}^{70} k\right) = \ln\left(\frac{70!}{2!}\right)$

$$4. D = \cos(\pi) + \cos(3\pi) + \cos(5\pi) + \dots + \cos((2n+1)\pi) = \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)\pi)$$

Remarque on peut calculer cette somme puisque tous les termes sont égaux à -1 ($\cos(\pi) = \cos(5\pi) = \dots = -1$). Donc $D = \sum_{k=0}^n -1 = -(n+1)$

$$5. E = 6 + 8 + 10 + \dots + 2n = \sum_{k=3}^n 2k$$

Remarque on peut la calculer : $E = \sum_{k=3}^n 2k = 2 \sum_{k=3}^n k = 2 \sum_{k'=0}^{n-3} (k'+3) = 2 \sum_{k'=0}^{n-3} k' + 2 \sum_{k'=0}^{n-3} 3 = 2 \frac{(n-3)(n-2)}{2} + 6(n-2) = (n-2)(n-3+6) = (n-2)(n+3)$ en utilisant deux fois la linéarité.

Exercice 2:

$$A = \sum_{k=0}^{10} 1 = 11$$

$$B = \sum_{k=1}^{100} 2k = 2 \sum_{k=1}^{100} k = 2 \times \frac{100 \times 101}{2} = 10100 \text{ en utilisant la linéarité au deuxième calcul.}$$

$$C = \sum_{k=15}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{14} k = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{14 \times 15}{2} = 4945 \text{ ou en effectuant un changement d'indice :}$$

$$C = \sum_{k=15}^{100} k = \sum_{k=0}^{85} (k+15) = \sum_{k=0}^{85} k + \sum_{k=0}^{85} 15 = \frac{85 \times 86}{2} + 15 \times 86 = 43 \times (85 + 30) = 43 \times 115 = 4945, \text{ où on a utilisé la linéarité pour la troisième égalité.}$$

$$D = \sum_{k=2}^{17} 2^k = 2^2 \times \frac{1 - 2^{17-2+1}}{1-2} = 2^{18} - 4 \text{ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique et } 2 \neq 1).$$

$$E = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \text{ (en utilisant la formule du cours rappelée à l'exercice 5).}$$

$$F = \sum_{k=10}^{20} k^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 2585$$

On aurait aussi pu faire un changement d'indice mais le calcul est beaucoup plus long : $F = \sum_{k=10}^{20} k^2 =$

$$\sum_{k=0}^{10} (k+10)^2 = \sum_{k=0}^{10} (k^2 + 20k + 100) = \dots$$

$$G = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{4^k} = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right) \text{ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique et } \frac{1}{4} \neq 1).$$

$$H = \sum_{k=2}^2 k^5 = 2^5 = 32 \text{ (La somme ne comporte qu'un terme).}$$

Exercice 3:

$$1. \quad A = \sum_{k=i}^j (j - k + 2^k) = \sum_{k=i}^j j - \sum_{k=i}^j k + \sum_{k=i}^j 2^k \text{ par linéarité.}$$

$$A = (j - i + 1)j - \left(\sum_{k=1}^j k - \sum_{k=1}^{i-1} k \right) + 2^i \times \frac{1-2^{j-i+1}}{1-2} \text{ car } 2 \neq 1$$

$$A = (j - i + 1)j - \left(\frac{j(j+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} \right) + 2^{j+1} - 2^i$$

$$B = \sum_{k=0}^n \frac{2 \times 3^k}{5^{k+1}} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k$$

$$B = \frac{2}{5} \times \frac{1 - (\frac{3}{5})^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} \text{ car } \frac{3}{5} \neq 1$$

$$B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

$$C = \sum_{k=0}^n (n - k + 1)^2 = \sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ (changement d'indice } p = n - k + 1)$$

$$D = \sum_{k=0}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n x + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \text{ par linéarité.}$$

$$D = (n+1)x + \frac{n+1}{2}$$

$$2. \quad E = \sum_{k=0}^n e^{2k+1} = e \sum_{k=0}^n (e^2)^k = e \frac{1 - (e^2)^{n+1}}{1 - e^2} \text{ car } e^2 \neq 1.$$

Exercice 4:

$$A = x^n - 1 = (x - 1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right).$$

$$B = \frac{1}{2^n} - x^{2n} = \left(\frac{1}{2} - x^2\right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k (x^2)^{n-1-k}\right) \right)$$

$$C = 1 - 3^{2n} = -8 \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} 9^k \right).$$

Exercice 5:

Démonstration par récurrence

Exercice 6:

Dans chacune de ces sommes, on fait intervenir le binôme de Newton.

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^{-k} (-1)^{2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} = (-1)^n (2 - 1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k = (1 + 2)^n = 3^n$$

$$C = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - 1 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n - 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1$$

$$D = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1 - 1)^n = 0$$

$$E = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

Pour calculer F on remarque que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$. Ce qui donne donc que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

$$F = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \times \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \text{ (changement d'indice } i = k - 1).$$

$$F = n2^{n-1}$$

Exercice 7:

$$1. \quad A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n n = n^2$$

$$B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j) = \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^n i + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

$$C = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 3 = \sum_{j=1}^n 3j = 3 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2^{i-j} = \sum_{i=1}^n 2^i \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Comme $\frac{1}{2} \neq 1$, on a :

$$D = \sum_{i=1}^n 2^i \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sum_{i=1}^n 2^i$$

$$D = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times 2 \times \frac{1-2^n}{-1} = 2^{n+1} + 2^{1-n} - 4 \text{ (comme } 2 \neq 1)$$

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \max(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

$$3. F = \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \binom{p}{k} 3^k$$

$$F = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 3^k = \sum_{p=0}^n 4^p \text{ d'après le binôme de Newton.}$$

Puis comme $4 \neq 1$, on obtient $F = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$.

$$G = \sum_{0 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \frac{k}{\ell+1}$$

$$G = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} k = \sum_{\ell=0}^n \frac{\ell}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$H = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \times j = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 8:

$$A = \prod_{k=7}^{150} k \text{ (Remarque } A = \frac{150!}{6!})$$

$$B = \prod_{k=1}^n e^{2k} \text{ (Remarque : } B = e^{\sum_{k=1}^n 2k} = e^{n(n+1)})$$

$$C = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i}$$

Exercice 9:

$$1. A = (-1)^9 = -1$$

$$2. B = (3^2)^n = 9^n$$

$$3. C = \frac{\prod_{k=1}^n (k+3)}{\prod_{k=1}^n (k+5)} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+3)}{\prod_{i=3}^{n+2} (i+3)} \text{ (changement d'indice } i = k+2)$$

$$C = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$$

$$4. D = e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}} = e^{\frac{n+1}{2}}$$

$$5. E = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n (k) \prod_{k=2}^n (k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k) \prod_{k=3}^{n+1} (k)}{\prod_{k=2}^n (k) \prod_{k=2}^n (k)} = \frac{n+1}{2n}$$

Exercice 10:

$$A = \frac{(2n)!}{(n-1)!}$$

$$B = \prod_{k=1}^n 2 \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

$$C = (n!)^2$$

$$D = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} i}{\prod_{i=1}^n (2i)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$E = \sum_{k=1}^n \ln(3) + \sum_{k=1}^n \ln(k) \text{ par linéarité}$$

$$E = n \ln(3) + \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) = n \ln(3) + \ln(n!)$$

Je me perfectionne!

Exercice 11:

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On utilise le conjugué.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-1} \\ &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \end{aligned}$$

2. Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{80} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{80} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ &= \sqrt{81} - \sqrt{0} \text{ par télescopage} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exercice 12:

1. Procéder par identification :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

2. On fait apparaître ici une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2(n+2)} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2(n+2)} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Exercice 13: Somme d'inégalités

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} &\iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{n - (n-1)}{n(n-1)} \\ &\iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \\ &\iff n^2 \geq n(n-1) \quad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n^2 \geq n^2 - n \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai. On a donc $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $S_n \geq \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} = 1$ car pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} > 0$.

D'autre part, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Donc en sommant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

$$\text{Ainsi, } S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Exercice 14:

1. Si $x = 1$, alors $f(x) = \sum_{i=0}^n 1 = n+1$. Supposons maintenant que $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $f(x)$ est une somme de termes de suite géométrique de raison $x \neq 1$ et de premier terme 1, et donc :

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

2. Si $x \neq 1$, alors $\sum_{i=1}^n ix^{i-1} = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. La fonction f est le quotient de deux polynômes (dérivables sur $\mathbb{R}$) et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Mais la fonction f peut aussi s'écrire sous la forme d'un polynôme (somme finie de monômes) donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n ix^{i-1}$$

$$\text{On en déduit alors que } \sum_{i=1}^n ix^i = xf'(x) = x \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

3. Il suffit de remplacer x par $\frac{1}{2}$ dans l'expression précédente.

Exercice 15:

En écrivant que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k = (k+1) - 1$, on a $kk! = ((k+1) - 1)k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$ et en utilisant la linéarité de la somme, il vient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (k+1)! - \sum_{k=0}^n k! \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} j! - \sum_{k=0}^n k! \\ &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

Exercice 16:

1. ★ Montrons que $P_n + I_n = 2^{2n}$. Lorsque k parcourt les entiers entre 0 et n , $2k$ parcourt les entiers pairs entre 0 et $2n$. Et lorsque k décrit les entiers entre 0 et $n-1$, $2k+1$ parcourt les entiers impairs entre 0 et $2n$. Par conséquent,

$$P_n + I_n = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$$

puis, en utilisant la formule du binôme de Newton, il vient $\boxed{P_n + I_n = (1+1)^{2n} = 2^{2n}}$.

- ★ Montrons que $P_n - I_n = 0$. En utilisant les arguments précédents et le fait que

$$(-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$$

$$P_n - I_n = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$$

En utilisant ensuite la formule du binôme de Newton, il vient $\boxed{P_n - I_n = (1-1)^{2n} = 0}$ car $2n > 0$.

2. Déterminons les valeurs P_n et I_n . Les nombres P_n et I_n sont solution du système

$$\begin{cases} P_n + I_n = 2^{2n} \\ P_n - I_n = 0 \end{cases}$$

La résolution est immédiate et elle fournit : $\boxed{P_n = I_n = 2^{2n-1}}$

Exercice 17:

- 1.

$$\sum_{k=0}^7 10^k = 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 = 11111111$$

On aurait aussi pu utiliser le fait que $10 \neq 1$ et donc que $\sum_{k=0}^7 10^k = \frac{10^8-1}{10-1} = \frac{1}{9} (10^8 - 1) = \frac{9 \times 11111111}{9} = 11111111$.

2. On peut généraliser le résultat précédent : $\underbrace{111\dots 1111}_{n \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$ donc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} 10^k = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{9} (10^j - 1) \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\sum_{j=1}^n 10^j - \sum_{j=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{10}{9} (10^n - 1) - n \right) \\ &= \frac{10}{81} (10^n - 1) - \frac{1}{9} n \end{aligned}$$

Noter que A est un entier (par définition de A), ce qui n'est pas évident quand on regarde la formule trouvée.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 18:

1. On utilise une fonction récursive :

```
def puissance(x,n) :
    if (n==0) :
        return 1
    else :
        return (x+1)*puissance(x,n-1)
```

2. On utilise une boucle **while**, on incrémente un compteur tout en calculant la puissance de $x + 1$.

```
def depasse (x,M) :
    n=0
    respuiss=1
    while (respuiss<=M) :
        n=n+1
        respuiss=respuiss*(x+1)
    return n
```

Notons qu'on aurait pu utiliser la fonction **puissance** mais ce n'est pas du tout optimal dans le sens où l'ordinateur effectue de nombreux calculs inutiles. En effet il recalcule à chaque itération de la boucle $(1+x)^n$ en repartant de $x+1$ et en re-faisant toutes les multiplications.

Cela aurait donné ceci :

```
def depasse (x,M) :
    n=0
    while (puissance(x,n)<=M) :
        n=n+1
    return n
```

Par exemple supposons que l'on fasse 5 itérations de la boucle **while**. Pour le premier programme on ne fera que 5 multiplications. Pour le second programme, comme on rappelle à chaque itération la fonction **puissance** il faut faire :

- 1 multiplication pour calculer $1+x$
- 2 multiplications pour calculer $(1+x)^2$
- 3 multiplications pour calculer $(1+x)^3$
- 4 multiplications pour calculer $(1+x)^4$
- 5 multiplications pour calculer $(1+x)^5$

donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$. Ainsi si l'on fait n itérations de la boucle **while**, pour le premier programme on ne fera que n multiplications alors que pour le second on en fera $\frac{n(n+1)}{2}$. La réponse attendue est donc le premier programme.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (d'après la formule du binôme de Newton),

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

4. En intégrant entre 0 et 1 la relation obtenue à la question précédente, il vient

$$\int_0^1 (x+1)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k dx$$

On a d'une part

$$\int_0^1 (x+1)^n dx = \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

et d'autre part, par linéarité de l'intégrale (on somme un nombre fini de termes),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k dx &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

On en conclut donc que
$$S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Exercice 19:**Partie A**

$$1. \quad u_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k 2^k \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n 2^k \right)$$

$$2. \quad \sum_{k=i}^n 2^k = 2^i \times \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} = 2^i \times (2^{n-i+1} - 1) = 2^{n+1} - 2^i \quad \text{Ainsi on a bien } \boxed{\sum_{k=i}^n 2^k = 2^{n+1} - 2^i}$$

$$3. \quad \text{Utilisons la deuxième expression de } u_n = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n 2^k \right).$$

D'après la question précédente, on a $u_n = \sum_{i=0}^n (2^{n+1} - 2^i)$ soit $u_n = \sum_{i=0}^n 2^{n+1} - \sum_{i=0}^n 2^i$ par linéarité de la somme.

$$u_n = (n+1)2^{n+1} - \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right)$$

$$u_n = (n+1)2^{n+1} + 1 - 2^{n+1} \text{ soit finalement } \boxed{u_n = n2^{n+1} + 1}$$

4. `def suite(n):`
`return n*2**(n+1)+1`

$$5. \quad u_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} 2^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k 2^k \right)$$

$$\boxed{u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k} \text{ puisque } 2^k \text{ ne dépend pas de l'indice } i.$$

$$6. \quad \text{D'après la question précédente on a } u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k = n2^{n+1} + 1$$

$$\text{d'où } 2 \sum_{k=0}^n k2^{k-1} + \sum_{k=0}^n 2^k = n2^{n+1} + 1 \text{ par linéarité de la somme.}$$

$$\text{soit } 2 \sum_{k=0}^n k2^{k-1} - 1 + 2^{n+1} = n2^{n+1} + 1$$

$$2 \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^{n+1} + 2. \text{ Finalement } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1}$$

Partie B

1. `def factorielle(n):`
`if (n==0):`
`return 1`
`else:`
`return n*factorielle(n-1)`

2. D'après le binôme de Newton, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = 0^n = 0}$$

3. On remarque que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$. Ce qui donne donc que

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}. \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \text{ par linéarité.}$$

Effectuons alors le changement d'indice $p = k - 1$

On obtient $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}$

Enfin d'après le binôme de Newton, on a : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

4. En utilisant deux fois de suite la formule (1) (appelé formule sans nom ou formule du pion), on a $k(k-1) \binom{n}{k} = n(k-1) \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$

D'où $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2}$ par linéarité .

En effectuant le changement d'indice $p = k - 2$ on obtient :

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{p}.$$

On utilise à nouveau la formule du binôme de Newton pour conclure $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

5. D'après la question précédente, on a par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^n k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=2}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=2}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} - \binom{n}{1}$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} - \binom{n}{1} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} - \binom{n}{1}$$

$$\text{finalement } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \text{ donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$