

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } z = (1 - i\sqrt{3})^2 & \text{d) } z = \frac{1 - 2i}{1 + 5i} & \text{g) } z = \frac{3+6i}{3-4i} \\
 \text{b) } z = (1 + 2i)^3 & \text{e) } z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} & \text{h) } z = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \\
 \text{c) } z = \frac{1+i}{1-i} & \text{f) } z = (a+ib)^3 + (a-ib)^3 \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}. & \text{i) } z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.
 \end{array}$$

Exercice n° 2: Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Indication : pour déterminer le cosinus et le sinus de l'angle $\pi/8$ on pourra utiliser la formule de duplication de l'angle $\cos(2a) = \dots$

Exercice n° 3: Effectuer les calculs suivants :

1. $(3 + 2i)(1 - 3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice n° 4: Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i \sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i \sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5) + i \sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i \sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice n° 5:

1. Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$.
2. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice n° 6: Calculer le module des nombres complexes suivants

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } z = -5 & \text{c) } z = \frac{2}{3}i & \text{e) } z = (4 - 3i)^3 & \text{g) } z = \frac{13 + 5i}{13 - 5i} \\
 \text{b) } z = 1 + i\sqrt{3} & \text{d) } z = (4 + 3i)(1 - 5i) & \text{f) } z = \frac{3+i}{1-i} & \text{h) } z = i^{54}
 \end{array}$$

Exercice n° 7: Déterminer l'écriture exponentielle des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } z = 1 + i\sqrt{3} & \text{d) } z = -2i & \text{g) } z = \cos(\frac{\pi}{5}) - i \sin(\frac{\pi}{5}) \\
 \text{b) } z = 1 + i & \text{e) } z = (1 - i)(1 + i\sqrt{3}) & \text{h) } z = \sin(\frac{\pi}{8}) + i \cos(\frac{\pi}{8}) \\
 \text{c) } z = \sqrt{3} - i & \text{f) } z = \frac{1}{(\sqrt{3} - i)^3} &
 \end{array}$$

Exercice n° 8: Déterminer l'écriture exponentielle des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} & \text{c) } z = e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{e) } z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}} \text{ où } a, b \in]-\pi, \pi[\\
 \text{b) } z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} & \text{d) } z = e^{ia} + e^{ib} \text{ où } a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&
 \end{array}$$

Exercice n° 9: On considère les nombres complexes $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$

1. Déterminer le module et l'argument des nombres a, b et ab .
2. Déterminer la forme algébrique de ab .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice n° 10:

Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant des formules du cours, déterminer sans calcul si les nombres suivants sont réels ou imaginaires purs :

$$z - \bar{z} \quad z + \bar{z} \quad z\bar{z} \quad z^2 - (\bar{z})^2 \quad z^2 + (\bar{z})^2 \quad z^2 + (\bar{z})^2 + z + \bar{z}.$$

Exercice n° 11: Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice n° 12: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|---|
| a) $2z^2 + z + 1 = 0$ | d) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ | f) $(\frac{z+i}{z-i})^2 - 2(\frac{z+i}{z-i}) + 5 = 0$ |
| b) $-z^2 + z - 5 = 0$ | e) $z^4 + 7z^2 + 12 = 0$ | g) $z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. |
| c) $t^2 + t + 1 = 0$ | | |

Je me perfectionne!

Exercice n° 13: Déterminer les nombres complexes tels que $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.

Exercice n° 14: des équivalences...

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = z^2 + 2z - 3$.
Montrer que $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $\operatorname{Re}(z) = -1$.
2. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Montrer que $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $|z| = 1$.
3. Soient z et u deux nombres complexes avec $u \neq 1$.
Montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 15: Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

- | | | |
|-------------------|------------------------------|--|
| a) $z = \bar{z}$ | d) $ z - 1 + i = z - 3 $ | f) $\bar{z} = \frac{4}{z}$ |
| b) $ z = 2$ | e) $ \frac{z-i}{z-2+i} = 1$ | g) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π |
| c) $ z - 3i = 5$ | | |

Exercice n° 16:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} (u + 1) \times (v - 1) = 1 \\ u + v = 1 \end{cases}$
3. Peut-on construire un enclos rectangulaire de périmètre $15m$ et d'aire $16m^2$?

Exercice n° 17: Résoudre les équations $\omega^2 = z$

- | | | | |
|-------------------|--------------|--------------|--------------------|
| 1. $z = 8 - 6i$, | 2. $z = 1$, | 3. $z = i$, | 4. $z = 7 + 24i$. |
|-------------------|--------------|--------------|--------------------|

Exercice n° 18: Résoudre les équations $X^2 = a$ avec $a = 3 - 4i$ et $a = 24 - 10i$.

Exercice n° 19:

1. Résoudre l'équation $\omega^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice n° 20: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 = \sqrt{3} - i$

2. $z^3 = 1$.

3. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

Exercice n° 21: Linéarisation et application

les expressions suivantes

1. Linéariser les expressions suivantes

(a) $\cos(x)^2$

(d) $\cos(2t) \sin(3t)$

(b) $\sin(x)^3$

(e) $\cos(2a) \sin^2(a)$

(c) $\cos(x)^2 \sin(x)$

(f) $\sin(3c) \sin(c)$

2. Application : calculer les intégrales suivantes :

(a) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx.$

(d) $K = \int_0^{\pi} \cos(2t) \sin(3t) dt.$

(b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3 dx.$

(e) $L = \int_0^{2\pi} \cos(2t) \sin^2(t) dt.$

(c) $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)^2 \sin(x) dx$

(f) $M = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \sin(x) dx.$

Exercice n° 22: Calcul de somme trigonométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. On veut calculer la somme

$$S_n(x) = \cos(0x) + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$$

1. Montrer que $e^{i0x} + e^{ix} + \cdots + e^{inx} = (e^{ix})^0 + (e^{ix})^1 + \cdots + (e^{ix})^n = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$

Indication : On pourra reconnaître la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ vue en première

2. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe de $\frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$.

Indication : On pourra utiliser la technique de l'angle moitié.

3. Calculer la somme $S_n(x)$

Exercice n° 23: Calcul de somme trigonométrique

1. Calculer $H_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(k\frac{\pi}{7}\right)$

Indication : On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Exercice n° 24:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $E = \sum_{k=0}^n e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$.

2. Calculer $F = \sum_{k=0}^n e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, en déduire $G = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$.

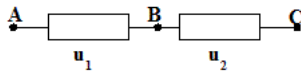
Exercice n° 25: Linéariser les expressions suivantes :

$A = (\cos(x))^6$ et $B = \cos(x)(\sin(x))^4$.

Exercice n° 26: Nombres complexes en physique.

En électricité, on utilise fréquemment les nombres complexes pour calculer plus facilement les tensions, intensités ou impédances.

Nous allons nous intéresser au calcul de la somme de deux tensions sinusoïdales.



On considère deux éléments de circuit placés en série aux bornes desquels existent respectivement les tensions alternatives $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \theta_2)$.

La tension entre A et C est alors nécessairement de la même fréquence et on la note

$$u(t) = U \cos(\omega t + \theta) = u_1(t) + u_2(t)$$

Le problème est alors de calculer U et θ en fonction de $U_1, U_2, \theta_1, \theta_2$.

Il existe deux méthodes pour y parvenir utilisant toutes les deux les nombres complexes.

★ La méthode de Frenel avec la représentation graphique des nombres complexes

Cette méthode consiste à remplacer chaque fonction sinusoïdale par un nombre complexe.

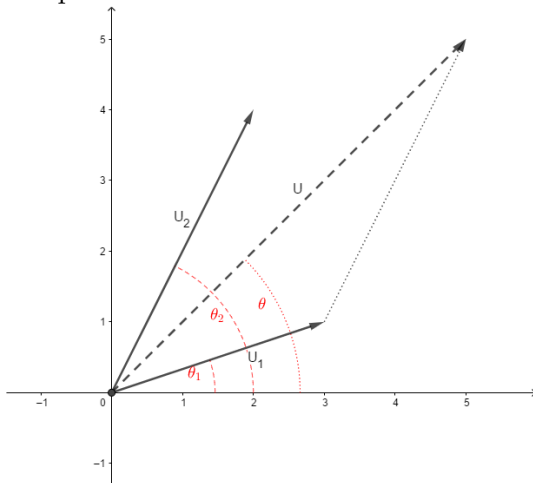
Ainsi u_1 est associé au nombre complexe de module U_1 et d'argument θ_1 c'est à dire le nombre $C_1 = U_1 e^{i\theta_1}$.

De même u_2 et u sont respectivement associés aux nombres $C_2 = U_2 e^{i\theta_2}$ et $C = U e^{i\theta}$.

On représente alors dans un repère orthonormé les vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ d'affixes respectives C_1, C_2 (à l'aide du module et de l'argument).

On construit ensuite le vecteur $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$.

Ainsi on peut directement déterminer de manière géométrique le module U et l'argument θ du nombre complexe C associé à la fonction cherchée, comme le montre la figure ci-dessous :



★ Méthode calculatoire avec les parties réelles et imaginaires

On associe comme précédemment les fonctions de tension aux nombres complexes déjà cités.

La somme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ correspond donc avec les nombres complexes à la somme $C = C_1 + C_2$.

En égalant les parties réelles et imaginaires dans cette égalité, on obtient deux équations permettant de déterminer U et θ en fonction de $U_1, U_2, \theta_1, \theta_2$.

1. On considère deux tensions alternatives

$$u_1(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \text{ et } u_2(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Déterminer la somme de ces deux tensions à l'aide de la méthode graphique de Frenel puis à l'aide de la méthode calculatoire.

2. Procéder de même avec

$$u_1(t) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } u_2(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 27: real or not real, that is the question !

1. Rappeler la caractérisation d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire pur à l'aide de la conjugaison.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$z^2 \text{ est un nombre réel } \iff z \text{ est un nombre réel ou } z \text{ est un imaginaire pur}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = e^{i\frac{3n\pi}{7}} + e^{-i\frac{n\pi}{7}}$. On considère l'équation

$$z^2 = a \quad (\clubsuit)$$

- (a) Montrer que $a = 2 \cos\left(\frac{2n\pi}{7}\right) e^{i\frac{n\pi}{7}}$. En déduire l'écriture exponentielle de a (on pourra discuter suivant la valeur de n).
- (b) À quelle(s) condition(s) sur n , le nombre a est-il un nombre réel ?
- (c) Résoudre l'équation $(\clubsuit)$ quand $n = 7$. Est-ce cohérent avec le résultat de la question 2. ?
- (d) Résoudre l'équation $(\clubsuit)$ quand $n = 14$. Est-ce cohérent avec le résultat de la question 2. ?
- (e) Résoudre enfin l'équation $(\clubsuit)$ quand $n = 5$.
4. Écrire un script `python` qui demande à l'utilisateur un entier naturel n et indique en fonction de la valeur de n si a est réel ou pas.

Exercice n° 28:

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On considère le nombre complexe :

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

1. Donner l'écriture exponentielle de w puis calculer w^5 .
2. Montrer que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$.
3. Posons $\alpha = w + w^4$.
 - (a) Vérifier que $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$
 - (b) Comparer w^4 et $\bar{w}$. En déduire que α est un nombre réel que l'on explicitera.
 - (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
 - (d) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
4. **Informatique.**
 - (a) Écrire un script qui prend en entrée trois nombres réels `a`, `b` et `c` et qui précise à l'utilisateur si les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont réelles ou complexes.
 - (b) On simule les trois coefficients `a`, `b` et `c` du trinôme $ax^2 + bx + c$ en lançant trois fois successivement un dé. Chacun des coefficients est donc un nombre compris entre 1 et 6. On demande alors à l'utilisateur de parier sur la nature des racines du trinôme (réelles ou complexes). Compléter dans le programme ci-dessous réalisant cette expérience les lignes en pointillés (*ne pas oublier de rendre le sujet avec la copie*).

```
.....  
a=randint(1,6)  
  
b=.....  
  
c=.....  
delta=b**2-4*a*c  
reponse=input("Ecris R si tu penses que les racines sont réelles  
et C si tu penses qu'elles sont complexes")  
  
if .....  
  
    print("gagné")  
else :  
    print("perdu")
```