Corrigé du Devoir Maison 4

Exercice 1

1. (a)
```
M= float(input("Donner un nombre réel"))
n=0
S=0
while S <=M:
    S=S + (n+1)**4-n**4
    n=n+1
print(n)
```

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours,

$$\boxed{D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

(c) On remarque que S_n est une somme télescopique, puisqu'elle est de la forme $\sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - x_k$, avec $x_k = k^4$. Ainsi, $\boxed{S_n = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4}$.

(d) D'après la formule du binôme de Newton, on a $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. En remplaçant dans l'expression de S_n, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1).$$

Par linéarité de la somme, on a

$$S_n = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

On reconnaît les sommes T_n et D_n dans les deux premiers termes. En utilisant que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

on obtient $S_n = 4T_n + 6D_n + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ c'est-à-dire $\boxed{S_n = 4T_n + 6D_n + (n+1)(2n+1)}$.

(e) Grâce à la question précédente, on obtient que $T_n = \frac{1}{4}\left(S_n - 6D_n - (n+1)(2n+1)\right)$. En utilisant les résultats des questions **(c)** et **(d)**, on déduit que

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - (n+1)(2n+1)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - (2n+1)(n+1)^2)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big((n+1)^2 - (2n+1)\big) \\
&= \boxed{\frac{(n+1)^2 n^2}{4}}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} 2^{i+j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(2^j \sum_{i=1}^{j} 2^i \right) \text{ par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \times 2 \frac{(1-2^j)}{1-2} \text{ en appliquant la formule pour une somme des } q^k \text{ avec } q = 2 \neq 1. \\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^{2j+1} - 2^{j+1} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} 4^j - 2 \sum_{j=1}^{n} 2^j \text{ par linéarité de la somme} \\
&= 2 \times 4 \frac{(1-4^n)}{1-4} - 2 \times 2 \frac{(1-2^n)}{1-2} \text{ car } 4 \neq 1 \text{ et } 2 \neq 1 \\
&= \frac{8}{3}(4^n - 1) + 4(1 - 2^n) \\
&= \frac{2}{3} 4^{n+1} - 2^{n+2} + \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

3. (a) i. `F(1)` renvoie la valeur 1. `F(2)` renvoie la valeur 2. `F(3)` renvoie la valeur 6. `F(4)` renvoie la valeur 24.

ii. La fonction `F` prend en entrée un nombre n et retourne la factorielle de ce nombre (calculée de façon récursive).

iii.

```
def CoeffBin(k,n):
    if (k <= n):
        return F(n)/(F(k)*F(n-k))
    else:
        return 0
```

(b) i. On a

$$U_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{3+k}{k} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} = 1 + 3 + 6$$

d'où $\boxed{U_2 = 10}$.

ii. Par symétrie, des coefficients binomiaux, on sait que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\boxed{\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{(n+k)-k} = \binom{n+k}{n}}$$

On effectue le changement d'indice $i = n + k$ dans la somme obtenue. Il vient

$$\boxed{U_n = \sum_{i=0+n}^{n+n} \binom{i}{n} = \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}}$$

iii. Soit i un entier naturel supérieur ou égal à $n+1$. D'après la formule du triangle de Pascal, on a

$$\binom{i}{n} + \binom{i}{n+1} = \binom{i+1}{n+1}$$

d'où $\boxed{\binom{i}{n} = \binom{i+1}{n+1} - \binom{i}{n+1}}$.

iv. On commence par mettre le terme d'indice n de côté dans la somme U_n (à l'aide de la relation de Chasles) :

$$U_n = \binom{n}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i}{n} = 1 + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i}{n}$$

En utilisant la question 4. (d), on a

$$\begin{aligned} U_n &= 1 + \sum_{i=n+1}^{2n} \left[\binom{i+1}{n+1} - \binom{i}{n+1} \right] \\ &= 1 + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i+1}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i}{n+1} \qquad \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= 1 + \sum_{j=n+2}^{2n+1} \binom{j}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i}{n+1} \qquad \text{(changement d'indice } j = i+1\text{)} \\ &= 1 + \sum_{i=n+2}^{2n+1} \binom{i}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{i}{n+1} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la relation de Chasles, il vient

$$U_n = 1 + \binom{2n+1}{n+1} + \sum_{i=n+2}^{2n} \binom{i}{n+1} - \sum_{i=n+2}^{2n} \binom{i}{n+1} - \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1}$$

D'où $\boxed{U_n = \binom{2n+1}{n+1}}$.

Exercice 2.

1. On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2 + 2\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1 + \sqrt{3} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

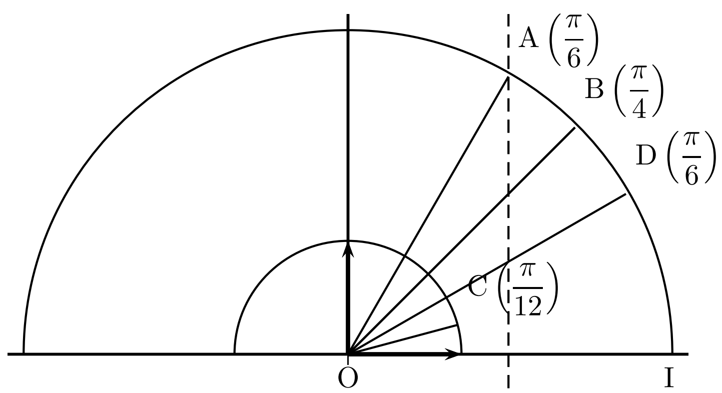
   Donc $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left[1 + \sqrt{3} + \mathrm{i} \left(\sqrt{3} - 1 \right) \right]$.
2. Modules et arguments :
   - $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donc $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   - On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

     Donc $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.
   - Il suit $Z = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

     Donc $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{12} \quad [2\pi]$.
3. On déduit des deux questions précédentes que $Z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et par identification :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

4. On place facilement le point $\mathrm{B}(2\,;\,2)$:



Le point A d'affixe z_1 est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].

Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de $\widehat{\text{IOA}}$.

Le point C avec la bissectrice de $\widehat{\text{IOD}}$ et le cercle de centre O et de rayon 1.

5. Le module : $\left|Z^{2\,025}\right| = |Z|^{2\,025} = 1^{2\,025} = 1$.

   L'argument : $\arg\left(Z^{2\,025}\right) = 2\,025 \times \dfrac{\pi}{12}\,[2\pi] = \dfrac{12 \times 168\pi + 9\pi}{12}\,[2\pi] = 168\pi + \dfrac{3\pi}{4}[2\pi] = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

   On a donc $Z^{2\,025} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$