BCPST1 **CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3**

Exercice 1.

1. $I_1 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2e^{\sqrt{t}}\right]_1^4 = 2\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$.
2. On va effectuer une double intégration par parties.
   On pose $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,
   $$\begin{array}{ll} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v(t) = -\cos(t) & v'(t) = \sin(t) \end{array}.$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on peut effectuer une intégration par parties.
   $$I_2 = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$
   On effectue une seconde intégration par parties pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t$
   On pose $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,
   $$\begin{array}{ll} u(t) = 2t & u'(t) = 2 \\ v(t) = \sin(t) & v'(t) = \cos(t) \end{array}.$$
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on peut effectuer une intégration par partie.
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[2t\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1).$$
   Conclusion :
   $$I_2 = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1).$$
3. $I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+3)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right)$.
4. Commençons par étudier le signe de $x^2 - x = x(x-1)$ sur $[-1; 1]$.

x	-1		0		1
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0

   D'après la relation de Chasles, on obtient
   $$I_4 = \int_{-1}^0 |x^2 - x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x^2 - x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^2 - x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 -x^2 + x\,\mathrm{d}x$$
   On trouve
   $$I_4 = 1.$$
5.
$$\begin{aligned} I_5 = \int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi -\sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_0^\pi + \left[\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^\pi \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{3}\left((-1)^3 - 1^4)\right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Problème 1.

Partie A : Informatique

1.
```
from math import cos
def SommeA(n,x):
    A=1
    for k in range(n):
         A=cos((k+1)*x)**2+A
    return A
```

Partie B : Calcul

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\cos^2(k\pi) = 1$. Donc $A_n(k\pi) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$

   De plus $\sin^2(k\pi) = 0$. Donc $B_n(k\pi) = 0$.
2. **On considère dans la suite du problème que** $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned}
(A_n + B_n)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) + \sin^2(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
(A_n - B_n)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) - \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)
\end{aligned}$$

   (b) i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0 \mod \pi$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2kx} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}\right)^k \quad \text{formule de Moivre} \\
&= \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}}
\end{aligned}$$

   car la dernière somme est celle des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x} \neq 1$ (car $x \neq 0 \mod \pi$). Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2kx} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x} - 1}}$$

   ii. En utilisant la technique de l'angle moitié, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(n+1)x}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \frac{2\,\mathrm{i}\,\sin((n+1)x)}{2\,\mathrm{i}\,\sin(x)} \quad \text{formule d'Euler} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

iii. Par linéarité de la partie réel, on sait que :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2kx}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2kx}\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(2kx\right)$$

Or d'après la question précédente, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.$$

Donc $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x}-1} = \dfrac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sin(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$.
On en conclut donc que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos\left(2kx\right) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}.}$$

4. D'après les questions précédentes, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} (A_n - B_n)(x) & = & \cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \\ (A_n + B_n)(x) & = & n+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A_n & = & \frac{n+1+\cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}{2} \\ B_n & = & \frac{n+1-\cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}}{2} \end{array}\right.$$

Problème 2

Partie A

1.
```
from math import *   # nécessaire pour la racine carrée
def mod(a,b):
     return sqrt(a**2+b**2)
```

2.
```
def depasse(a,b):
    if mod(a,b)>1:
       n=0
       while mod(a,b)**n<=1000:
          n=n+1
       return n
```

3.
```
from math import *    # nécessaire pour pi
angle=float(input('donnez l argument'))
if (angle==0):
    print('réel positif')
elif (angle==pi):
    print('réel négatif')
elif (angle ==pi/2) or (angle==-pi/2):
    print('imaginaire pur')
else:
    print('complexe quelconque')
```

Partie B

1.

$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) &= \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= -2\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right) &= z^3 + az^2 + bz - z^2\mathrm{i}\sqrt{2} - az\mathrm{i}\sqrt{2} - b\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= z^3 + \left(a - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - b\mathrm{i}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} & = & -2 - i\sqrt{2} \\ b - ai\sqrt{2} & = & 2 + 2i\sqrt{2} \\ -bi\sqrt{2} & = & -2i\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & -2 \\ b + 2i\sqrt{2} & = & 2 + 2i\sqrt{2} \\ -b & = & -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a & = & -2 \\ b & = & 2 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

On a donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 - 2z + 2\right)$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$, en utilisant la factorisation de la question précédente, on obtient

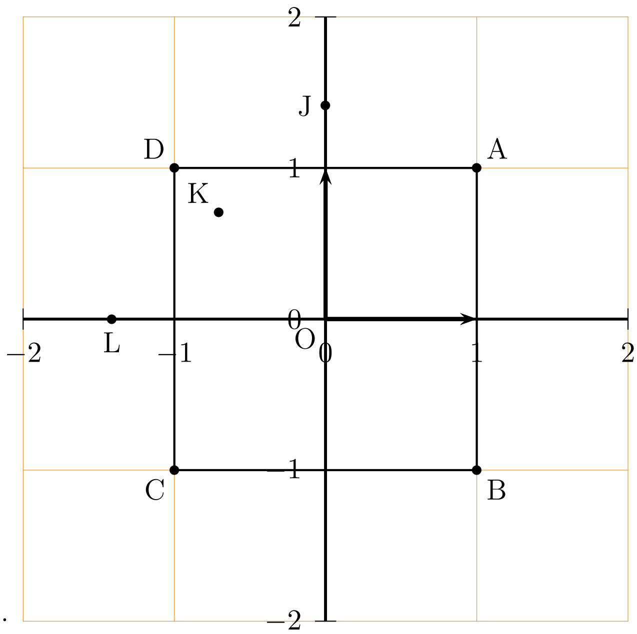
$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 - 2z + 2\right) \\ &\iff z - i\sqrt{2} = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

Résolution de $z^2 - 2z + 2 = 0$:
On calcule le discriminant de l'équation $\Delta = -4$. Donc l'équation admet deux solutions complexes conjugués :

$$\begin{cases} z_1 & = & 1 + i \\ z_2 & = & 1 - i \end{cases}$$

Les solutions de $z^2 - 2z + 2 = 0$ sont $i\sqrt{2}$, $\quad 1 + i$, $\quad 1 - i$.

Partie C

1. On a $z_A = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $z_J = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$
2. On a $z_k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. 

4. Soit z_L l'affixe de L symétrique de J par rapport à K.
Comme K est le milieu du segment [JL], on a $z_K = \dfrac{z_L + z_J}{2}$. Donc $z_L = 2z_K - z_J = -\sqrt{2}$.
5. On a $|z_A|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, $|z_B|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$, $|z_J|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et $|z_L|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
On a donc $OA = OB = OJ = OL = \sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

Problème 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k3^k$$

Partie A : Estimation numérique

1. Dans la fonction `devine`, on initialise la variable S à 0. Puis on parcourt une boucle avec i qui varie de 0 à $n-1$. On ajoute à S la valeur $i * 3^i$. La fonction `devine` permet de calculer $\sum_{k=1}^{n-1} k3^k$
2. L'appel `devine(1)` renvoie 0 car il n'y a aucun passage dans la boucle.
3. L'appel `devine(3)` renvoie $1 * 3 + 2 * 3^2 = 21$

Partie B : A l'aide de la dérivation On considère la fonction

$$F_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. La fonction F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

   On remarque $S_n = \sum_{k=1}^{n} k3^k = 3\sum_{k=1}^{n} k3^{k-1} = 3F_n'(3)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On sait que $\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x}$.
3. On pose $G_n : x \mapsto x\frac{1-x^n}{1-x}$. La fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$). On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\begin{aligned}
G_n'(x) &= \frac{1-x^n}{1-x} + x\frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)(1-x^n) - nx^n(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $G_n'(x) = F_n'(x)$.
   En particulier pour $x = 3$, on a

$$S_n = 3G_n'(3) = 3\frac{1-(n+1)3^n + n3^{n+1}}{4}$$

Partie C : A l'aide de somme double

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 3^j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 3^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} j3^j = S_n
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n} 3^j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 3^j \\
&= \sum_{i=1}^{n} 3^i \frac{1-3^{n-i+1}}{1-3} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(3^{n+1}-3^i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3^{n+1}\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}3^i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n3^{n+1}-3\frac{1-3^n}{1-3}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(n3^n-\frac{1-3^n}{-2}\right) = \frac{3}{4}\left(2n\times 3^n+1-3^n\right)
\end{aligned}
$$

2. On obtient

$$S_n = \frac{3}{4}\left(2n\times 3^n+1-3^n\right)$$

Partie D : A l'aide de somme telescopique

1.

$$
\begin{aligned}
S_n - 3S_n &= \sum_{k=1}^{n} k3^k - 3\sum_{k=1}^{n} k3^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k3^k - \sum_{k=1}^{n} k3^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k3^k - \sum_{i=2}^{n+1}(i-1)3^i \\
&= 3+\sum_{k=2}^{n} k3^k - \left(\sum_{i=2}^{n}(i-1)3^i + n3^{n+1}\right) \\
&= 3+\sum_{k=2}^{n}\left(k3^k-(k-1)3^k\right) - n3^{n+1} \\
&= 3+\sum_{k=2}^{n} 3^k - n3^{n+1} \\
&= 3+3^2\frac{1-3^{n-1}}{1-3} - n3^{n+1}
\end{aligned}
$$

2. Comme $S_n - 3S_n = -2S_n$, on trouve que

$$S_n = \frac{-1}{2}\left(3+3^2\frac{1-3^{n-1}}{1-3}-n3^{n+1}\right).$$