Devoir Maison 5 corrigé

Exercice 1.

Dans cette exercice, on considère une population de tortues. Des études sur un type de tortue ont permis de déterminer que :

- les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge
- 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année
- les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie.

On définit a_n comme le nombre d'adultes vivant l'année n, et b_n le nombre de bébés de cette même année.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre d'adultes de l'année $n+2$ est la somme du nombre d'adultes de l'année d'avant qui sont toujours vivant, soit 60% des adultes de l'année $n+1$ et du nombre de bébés de l'année n qui ont atteint l'âge adulte, soit 20% des bébés de l'année n. Ainsi,

$$\boxed{a_{n+2} = 0,6a_{n+1} + 0,2b_n}$$

D'autre part, le nombre de bébés de l'année $n+1$ est égal à 4 fois le nombre de femelles de l'année précédente. Les femelles composant la moitié de la population, il y avait $\frac{1}{2}a_n$ femelles l'année n. Ainsi,

$$\boxed{b_{n+1} = 4 \times \frac{1}{2}a_n = 2a_n}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = 0,6a_{n+2} + 0,2b_{n+1} = 0,6a_{n+2} + 0,2 \times 2b_n$.
D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+3} = 0,6a_{n+2} + 0,4a_n}$.

3.
```
def suite(n):
    a=8000
    b=7700
    c=7400
    for i in range(n) :
        c,b,a= 0.6*c+0.4*a,c,b
    return a
```
$\boxed{\text{La suite semble converger vers 7600.}}$

4. On considère le polynôme $P = X^3 - 0,6X^2 - 0,4$.
   (a) $P(1) = 1 - 0,6 - 0,4 = 0$ donc $\boxed{1 \text{ est racine de } P}$.
   (b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   $(X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c.$
   $$P = (X-1)(aX^2+bX+c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -0,6 \\ c - b = 0 \\ -c = -0.4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0,4 \\ c = 0,4 \end{cases}$$
   Ainsi, $\boxed{P = (X-1)(X^2 + 0,4X + 0,4)}$
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x^2 + 0,4x + 0,4 = 0$.
   Le discriminant du polynôme est $\Delta = 0,4^2 - 4 \times 0,4 = 0,16 - 1,6 = -1,44 = -1,2^2 < 0$ et ses racines sont donc $x_1 = \dfrac{-0,4+1,2i}{2} = -0,2+0,6i$ et $x_2 = \dfrac{-0,4-1,2i}{2} = -0,2-0,6i$.
   Ainsi, les racines de P sont $\boxed{1,\ -0,2+0,6i,\ -0,2-0,6i}$.

5. On <u>admet</u> qu'il existe $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = A + B(-0,2-0,6i)^n + C(-0,2+0,6i)^n$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

(a) Exprimer a_0, a_1 et a_2 en fonction de A, B et C.

$$\begin{cases} a_0 = A + B + C \\ a_1 = A + B(-0,2-0,6i) + C(-0,2+0,6i) \\ a_2 = A + B(-0,2-0,6i)^2 + C(-0,2+0,6i)^2 \end{cases}$$

(b) Montrer que $A = 7600$, $B = 200+150i$ et $C = 200-150i$ est solution du système précédent.

On a : $A + B + C = 7600 + 200 + 150i + 200 - 150i = 8000 = a_0$.

De plus,

$$\begin{aligned} & A + B(-0,2-0,6i) + C(-0,2+0,6i) \\ &= 7600 + (200+150i)(-0,2-0,6i) + (200-150i)(-0.2+0.6i) \\ &= 7600 - 0,2\times 200 - 0,6i \times 200 - 0,2\times 150i - 0,6i\times 150i - 0,2\times 200 + 0,6i\times 200 \\ &\quad - 0,2\times(-150i) - 0,6i\times 150i \\ &= 7600 - 2\times 0,2\times 200 - 2\times 0,6i\times 150i \\ &= 7600 - 80 + 180 \\ &= 7700 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} & A + B(-0,2-0,6i)^2 + C(-0,2+0,6i)^2 \\ &= 7600 + (200+150i)(-0,2-0,6i)^2 + (200-150i)(-0.2+0.6i)^2 \\ &= 7600 + (200+150i)(0,04+0,24i-0,36) + (200-150i)(0,04-0,24i-0,36) \\ &= 7600 + (200+150i)(-0,32+0,24i) + (200-150i)(-0,32-0,24i) \\ &= 7600 - 0,32\times 200 + 0,24i\times 200 - 0,32\times 150i + 0,24i\times 150i - 0,32\times 200 \\ &\quad - 0,24i\times 200 + 0,32\times 150i + 0,24i\times 150i \\ &= 7600 - 2\times 0,32\times 200 - 2\times 0,24\times 150 \\ &= 7600 - 128 - 72 \\ &= 7400 \\ &= a_2 \end{aligned}$$

(c) En déduire la limite de la suite (a_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire et le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$, on a :

$$\begin{aligned} [a_n - A| &= |B(-0,2-0,6i)^n + C(-0,2+0,6i)^n| \\ &\leq |B| \times |-0,2-0,6i|^n + |C| \times |-0,2+,6i|^n \\ &\leq |B|\sqrt{0,4}^n + |C|\sqrt{0,4}^n \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{0,4}^n = 0$ car $-1 < \sqrt{0,4} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to=\infty} |B|\sqrt{0,4}^n + |C|\sqrt{0,4}^n = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n - A| = 0$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A = 7600$.

Exercice 2.

1. Les fonctions y et $x \longmapsto x^2+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad z'(x) = 2xy(x) + (x^2+1)y'(x)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+1)y'(x) + (3x^2+2x+3)y(x) = xe^{-3x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+1)y'(x) + 2xy(x) + 3(x^2+1)y(x) = xe^{-3x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) + 3z(x) = xe^{-3x} \\
&\iff z \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } z \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

2. ⋆ L'équation (E_2) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

   ⋆ L'équation homogène associée est

   $$z' + 3z = 0 \qquad (H)$$

   L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3x} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$.

   ⋆ On utilise la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E_2).
   Pour x dans $\mathbb{R}$ on pose $z_p(x) = \lambda(x)e^{-3x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, la fonction z_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z_p'(x) = \lambda'(x)e^{-3x} - 3\lambda e^{-3x}$.

   $$\begin{aligned}
   \text{Or } z_p \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ z_p'(x) + 3z_p(x) = xe^{-3x} \\
   &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)e^{-3x} = xe^{-3x} \\
   &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x.
   \end{aligned}$$

   Une primitive de $\lambda' : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $\lambda : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$. Donc une solution particulière de (E_2) est $z_p(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{-3x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

   ⋆ D'après le théorème fondamental de résolution des équations différentielles,

   $$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \mathcal{S}_{E_2} = \left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{x^2}{2}e^{-3x} \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

3. D'après la question 1, on a

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} &\iff z : x \longmapsto (x^2+1)y(x) \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = (x^2+1)y(x) = C\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{x^2}{2}e^{-3x} \\
&\qquad\qquad \text{d'après la question 2.} \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{C\,\mathrm{e}^{-3x}}{x^2+1} + \frac{x^2e^{-3x}}{2(x^2+1)}, \quad \text{car } x^2+1 \neq 0
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\mathcal{S}_{E_1} = \left\{x \longmapsto \dfrac{C + \frac{x^2}{2}}{x^2+1}e^{-3x} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$