# Corrigé du Devoir surveillé 4

## Exercice 1.

1. $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\ln(2)}{2}.}$

2. Soit $x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$. Donc $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}.}$

3. D'après la question précédente, $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$.
   Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 x - \frac{x}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ par linéarité de l'intégrale. On obtient $\boxed{J_2 = \dfrac{1}{2} - J_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln(2)}{2}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0;1]$ $x^n \geq 0$ et $1+x^2 \geq 1$. Or la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Donc $\ln(1+x^2) \geq 0$. Par produit pour tout $x \in [0;1]$ $x^n\ln(1+x^2) \geq 0$ Comme 0<1, par positivité de l'intégrale, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$x \leq 1 \text{ donc } x^{n+1} < x^n \text{ car } x^n \text{ est positif}$$
$$\text{donc } x^{n+1}\ln(1+x^2) < x^n\ln(1+x^2) \text{ car } \ln(1+x^2) \text{ est positif puisque } 1+x^2 \geq 1$$

   donc $\boxed{\forall x \in [0\ ;\ 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+1}\ln(1+x^2) < x^n\ln(1+x^2)}$

6. Comme 0<1, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} < I_n$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} < I_n$ la suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante.}}$

7. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc d'après le théorème de limite monotone, la suite $\boxed{(I_n) \text{ est convergente.}}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in [0\ ;\ 1]$

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^{n+1} \text{ car } x^{n+1} \geq 0$$

   Comme 0<1, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}.$$

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+2}}$

9. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\qquad 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes la suite $(J_n)$ converge et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$

## Exercice 2.

1. (a) La fonction $y$ est est deux fois dérivable. Comme la fonction cosinus est aussi deux fois dérivable sur $I$, la fonction $z$ est deux fois dérivable sur $I$ par produit. De plus,

$$\boxed{\forall x \in I,\quad z'(x) = -\sin(x)y(x) + \cos(x)y'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = -\cos(x)y(x) - 2\sin(x)y'(x) + \cos(x)y''(x)}$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } I &\iff \forall x \in I,\ \cos(x)y''(x) - 2\sin(x)y'(x) + 3\cos(x)y(x) = 1 \\ &\iff \forall x \in I,\ \big(\underbrace{-\cos(x)y(x) - 2\sin(x)y'(x) + \cos(x)y''(x)}_{=z''(x)}\big) + 4\underbrace{\cos(x)y(x)}_{=z(x)} = 1 \\ &\iff \forall x \in I,\ z''(x) + 4z(x) = 1 \end{aligned}$$

   donc $\boxed{y \text{ est solution de } (\star) \text{ sur } I \text{ si et seulement si } z \text{ est solution de } (\star\star)}$ sur $I$.

2. $\star$ L'équation différentielle $(\star\star)$ est linéaire du second ordre à coefficients constants.

   $\star$ Son équation homogène est $z''+4z=0$, l'équation caractéristique associée est $x^2+4=0$. Elle admet deux racines complexes qui sont $\pm 2\,\mathrm{i}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de $(H)$ est :

$$\left\{x \longmapsto A\cos(2x)+B\sin(2x)\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

   $\star$ Une solution particulière de $(\star\star)$ est la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{4}$.

   $\star$ D'après la théorème fondamental, l'ensemble des solutions de $(\star\star)$ est :

$$\boxed{\left\{x \longmapsto A\cos(2x)+B\sin(2x)+\frac{1}{4}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

3. D'après les questions 1.(b) et 2., on en déduit donc que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\boxed{\left\{x \longmapsto \frac{A\cos(2x)+B\sin(2x)+\frac{1}{4}}{\cos(x)}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

4. Soient $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et la fonction $y : x \longmapsto \dfrac{A\cos(2x)+B\sin(2x)+\frac{1}{4}}{\cos(x)}$.

   On a $y(0)=A+\dfrac{1}{4}$ et $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{B+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ donc :

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A+\frac{1}{4}=0 \\ B+\frac{1}{4}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

   Donc $\boxed{\text{le problème de Cauchy admet pour unique solution la fonction } x \longmapsto -\dfrac{\cos(2x)}{4}-\dfrac{\sin(2x)}{4}+\dfrac{1}{4}}$.

## Problème 1.

### I – Modélisation informatique

1. (a) On utilise l'affectation simultanée `a,b=b,a` et une boucle `for`.

```
def antilopetigre(n) :
     a=2
     t=2
     for k in range(n-1) :
          a,t = 2*a-3*t+4, a-t
     return a, t
```

   (b)

```
from math import *
def serpent(n) :
     s1=2
     s2=5
     if n==1:
          return s1
     else :
          for i in range(3,n+1):
                ssuivant=floor(s2**2/s1)-1
                s1=s2
                s2=ssuivant
          return s2
```

   (c) La fonction `antilopetigre` renvoie deux nombres `a` et `t`.

```
def nombre(n) :
     a, t = antilopetigre(n)
     s = serpent(n)
     return a+t+s
```

2. Cette fonction prend en entrée un nombre seuil `a` (de serpents) et renvoie la première année à partir de laquelle la réserve contient au moins `a` serpents.

## II – Évolution des population d'antilopes et de tigres

1. En remplaçant $n$ par 1 dans les relations de récurrence, on a $\boxed{a_2 = 2 \text{ et } t_2 = 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3t_{n+1} + 4 = 2a_{n+1} - 3(a_n - t_n) + 4 = 2a_{n+1} - 3a_n + 3t_n + 4$$

Or, d'après la première équation donnée dans l'énoncé, on a $3t_n = -a_{n+1} + 2a_n + 4$ donc :

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n - a_{n+1} + 2a_n + 4 + 4 = a_{n+1} - a_n + 8$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 8}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$A_{n+2} - (A_{n+1} - A_n) = a_{n+2} - 8 - (a_{n+1} - 8 - (a_n - 8)) = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n - 8 = 0$$

d'après la question II-2. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a bien } A_{n+2} = A_{n+1} - A_n}$.

4. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $x^2 = x - 1$ soit encore $x^2 - x + 1 = 0$. Son discriminant vaut $-3 < 0$ donc cette équation admet deux racines complexes qui sont $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $A_n = A\cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$. Déterminons les valeurs de $A$ et $B$. On a tout d'abord $A_1 = a_1 - 8 = -6$ et $A_2 = a_2 - 8 = -6$ (car $a_1 = a_2 = 2$) donc :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A_1 = -6 \\ A_2 = -6 \end{cases} &\iff \begin{cases} A + \sqrt{3}B = -12 & \mathrm{L}_1 \\ -A + \sqrt{3}B = -12 & \mathrm{L}_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A + \sqrt{3}B = -12 & \mathrm{L}_1 \\ 2\sqrt{3}B = -24 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{12}{\sqrt{3}} = -\frac{12\sqrt{3}}{3} = -4\sqrt{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } A_n = -4\sqrt{3}\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $a_n = 8 + A_n$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 8 - 4\sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}$$

6. Aucune des deux suites ne tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ; plus précisément, les valeurs prises par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ oscillent respectivement autour de 8 et 4 et les suites divergent (elles ne convergent vers aucune limite) donc :

$$\boxed{\text{aucune des deux espèces ne tend à disparaître selon le modèle proposé}}$$

## III – Évolution de la population de serpents

1. On a $\boxed{s_3 = \left\lfloor \dfrac{s_2^2}{s_1} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \dfrac{25}{2} \right\rfloor - 1 = 12 - 1 = 11}$.

2. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = 2\ell + 1 \iff \ell = -1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $v_n = u_n - (-1) = u_n + 1$. D'une part $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et d'autre part, $\ell = 2\ell + 1$. En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient $u_{n+1} - \ell = 2u_n + 1 - (2\ell + 1) = 2(u_n - \ell)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = u_1 + 1 = 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $v_n = v_1 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$ et comme $u_n = v_n - 1$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 3 \times 2^{n-1} - 1}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $(u_{n+1})^2 = (3 \times 2^n - 1)^2 = 9 \times 2^{2n} - 6 \times 2^n + 1$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{(u_{n+1})^2}{u_n} - u_{n+2} &= \frac{9 \times 2^{2n} - 6 \times 2^n + 1}{3 \times 2^{n-1} - 1} - \left(3 \times 2^{n+1} - 1\right) \\
&= \frac{9 \times 2^{2n} - 6 \times 2^n + 1 - \left(3 \times 2^{n+1} - 1\right)\left(3 \times 2^{n-1} - 1\right)}{3 \times 2^{n-1} - 1} \\
&= \frac{9 \times 2^{2n} - 6 \times 2^n + 1 - 9 \times 2^{2n} + 3 \times 2^{n+1} + 3 \times 2^{n-1} - 1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \\
&= \frac{9 \times 2^{2n} - 6 \times 2^n + 1 - 9 \times 2^{2n} + 6 \times 2^n + 3 \times 2^{n-1} - 1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \\
&= \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^{n-1} - 1} \\
&= \frac{\left(1 + 3 \times 2^{n-1}\right) - 1}{3 \times 2^{n-1} - 1}
\end{aligned}$$

et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{(u_{n+1})^2}{u_n} - u_{n+2} = 1 + \frac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question III-2.(b), on a :

$$\left\lfloor \frac{(u_{n+1})^2}{u_n} \right\rfloor = \left\lfloor u_{n+2} + 1 + \frac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \right\rfloor$$

Comme $n \geqslant 1$, on a $3 \times 2^{n-1} - 1 \geqslant 2$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$u_{n+2} + 1 \leqslant u_{n+2} + 1 + \frac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \leqslant u_{n+2} + 1 + \frac{1}{2} < (u_{n+2} + 1) + 1$$

Or on sait que $u_{n+2}$ (et donc $u_{n+2}+1$) est un entier (d'après la question III-2.(a)) donc, par définition de la partie entière, on a :

$$\left\lfloor u_{n+2} + 1 + \frac{1}{3 \times 2^{n-1} - 1} \right\rfloor = u_{n+2} + 1$$

Finalement, $\left\lfloor \dfrac{(u_{n+1})^2}{u_n} \right\rfloor = u_{n+2} + 1$ et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+2} = \left\lfloor \dfrac{(u_{n+1})^2}{u_n} \right\rfloor - 1}$

(d) On montre enfin par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s_n = u_n$.

# Problème 2

## Partie A : Etude d'une application

1. **Étude de l'injectivité de $f$.**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} = f(x)$$

Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a } f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)}$.

(b) D'après la question précédente, on a par exemple (pour $x = 2$) :$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2) = \dfrac{4}{5}$

Donc le nombre $\dfrac{4}{5}$ admet au moins deux antécédents par $f$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $\dfrac{1}{2}$ et 2.

Par conséquent, $\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas injective}}$

2. **Étude de la surjectivité de $f$.**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc, en développant, $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, ce qui se réécrit $x^2 + 1 \geqslant 2x$. En développant $(x+1)^2$, qui est positif ou nul, on trouve également que $x^2 + 1 \geqslant -2x$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 2x \leqslant 1 + x^2 \text{ et } -2x \leqslant 1 + x^2}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les inégalités de la question précédente, on a $-(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1 + x^2$. Or $1 + x^2 > 0$ donc $-1 \leqslant \dfrac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } -1 \leqslant f(x) \leqslant 1}$.

(c) On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, le nombre $2 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent par $f$ dans $\mathbb{R}$. On en conclut que

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas surjective}}$$

3. **Rendre $f$ bijective.**

(a) On commence par étudier les variations de l'application $f$ sur son domaine de définition. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions qui le sont) et, pour tout nombre réel $x$, on a

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

et le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)(1+x)$. On en déduit le tableau de signes de $f'$ et le tableau de variations de $f$ suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

On trouve donc que $\boxed{f([-1,1]) = [-1,1]}$.

(b) Soit $y \in f([-1,1]) = [-1,1]$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.
Soit $x \in [-1,1]$.

$$g(x) = y \iff \frac{2x}{1+x^2} = y \iff 2x = y(1+x^2) \iff 2x = y + yx^2 \iff yx^2 - 2x + y = 0$$

On distingue deux cas.

⋆ **Premier cas :** $y = 0$. Alors

$$g(x) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0$$

et donc 0 admet un unique antécédent dans $[-1,1]$ par l'application $g$ qui est 0.

⋆ **Deuxième cas :** $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Alors $yx^2 - 2x + y = 0$ est une équation du second degré (puisque $y \neq 0$) dont le discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times y \times y = 4(1-y^2)$. Si $y = 1$, alors on a une unique racine qui est $x = 1$ tandis que si $y = -1$, alors on a une unique racine qui est $x = -1$. Supposons maintenant que $y \in ]-1,1[ \setminus \{0\}$. Alors le discriminant est strictement positif et donc l'équation admet donc deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont

$$\frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} \text{ et } \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} \qquad \text{c'est-à -dire} \qquad \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \text{ et } \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

Il reste à vérifier qu'il n'y a qu'une seule de ces deux solutions qui appartient à l'intervalle $[-1,1]$. On a $1 - y^2 > 0$ puisque $y \in ]-1,1[$ donc $\sqrt{1-y^2} > 0$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $1 + \sqrt{1-y^2} > 1$. On en déduit donc que, si $y \in ]0,1[$, alors $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1}{y} > 1$ et si $y \in ]-1,0[$, alors $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < \frac{1}{y} < -1$. Par conséquent, $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1,1]$. Par contre, pour tout $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}{y\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)} = \frac{-y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$$

car on a montré précédemment que $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1,1]$, donc $-\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \notin [-1,1]$ et donc son inverse appartient à l'intervalle $[-1,1]$. Finalement, le nombre $y$ admet un et un seul antécédent par $g$ dans l'intervalle $[-1,1]$ qui est $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

On en conclut donc que $\boxed{\text{l'application } g \text{ est bijective}}$ et,

$$\boxed{\forall y \in [-1,1], \qquad g^{-1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si } y \in [-1,1] \setminus \{0\} \end{cases}}$$

car l'antécédent obtenu précédemment reste valable pour $y=-1$ et $y=1$.

## Partie B : Suite et python

1.
```
def f(x):
    return 2*x/(x**2+1)
def suite(n,u0):
    u=u0
    L=[u]
    for i in range(n):
        u=(-1)**i*f(u)
        L.append(u)
    return(L)
```

2.
```
def min(L):
    m=L[0]
    for i in range(len(L)):
        if m>L[i]:
            m=L[i]
    return m
```

3.
```
def minimumsuite(n,u0):
    return min(suite(n,u0))
```

## Partie C : Une équation différentielle

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On pose $\forall t \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{array}{lll} u'(t) = \mathrm{e}^t & \text{et} & u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t & \text{et} & v'(t) = 1. \end{array}$$
   Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties,
   $$\int_0^x t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = x\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$$
2. (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   Soit $(H)\ :\ y'(x) + \dfrac{2x}{x^2+1} y(x) = 0$ l'équation homogène associée.
   $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive. Prenons $x \mapsto \ln(x^2+1)$.
   L'ensemble des solutions de $(H)$ est donc
   $$S_H = \left\{ x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x^2+1)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto \frac{C}{x^2+1} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$
   On cherche une solution particulière $y_p$ de $(E)$ par variation de la constante. Soit $y_p : x \mapsto \dfrac{C(x)}{x^2+1}$ où $C$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $y_p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = C'(x)\dfrac{1}{x^2+1} + C(x)\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
   $Y_p$ est solution de (E) donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$C'(x)\frac{1}{x^2+1} + C(x)\frac{-2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{x^2+1}\frac{C(x)}{x^2+1} = \frac{x\mathrm{e}^x}{x^2+1}$$
   $$\Longleftrightarrow C'(x) = x\mathrm{e}^x$$
   D'après la question 1 de la partie C, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est $x \mapsto x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$. Ainsi, on a $y_p : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2+1}$ qui est solution de $(E)$.
   D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de $(E)$ est
   $$S_E = \left\{ \frac{C}{x^2+1} + \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2+1} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$
3. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto \dfrac{C}{x^2+1} + \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2+1}$.
   On a $y(1) = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 \Longleftrightarrow C = 1$.
   Donc le problème de Cauchy admet pour unique solution
   $$x \mapsto \frac{1}{x^2+1} + \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{x^2+1} \quad \text{soit } x \mapsto \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 2}{x^2+1}$$