

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1: Déterminer les primitives sur un intervalle à préciser des fonctions proposées.

1. $f : a \mapsto 5a^5 - \frac{1}{a} + \frac{3}{a^7} + \sqrt{5a}$
2. $f : x \mapsto e^{2x} + \ln(3x) - \frac{1}{x^9}$
3. $f : x \mapsto -\frac{2}{\sqrt{3x}} + \frac{x^7}{3} + x\sqrt{x}$
4. $f : x \mapsto \frac{x - \sin(2x)}{x^2 + \cos(2x) + 2}$
5. $f : x \mapsto \frac{4}{\cos^2(x) \tan^4(x)}$
6. $f : u \mapsto 2 \sin(u) e^{\cos(u)}$
7. $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-7x}} + \cos(3x)$
8. $h : t \mapsto \frac{2t}{(1+t^2)^3}$
9. $i : u \mapsto \frac{1}{(2u+5)^3}$

Exercice n° 2: Déterminer une primitive qui s'annule en a pour les fonction proposées (on donnera le plus grand intervalle sur lequel est valable cette primitive)

1. $f : x \mapsto x^3 + 2x - \frac{1}{4} + \frac{1}{x}$ et $a = 1$.
2. $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ et $a = 1$.
3. $h : t \mapsto 2te^{t^2}$ et $a = -1$.
4. $k : \theta \mapsto \cos(2\theta)$ et $a = \pi$.

Exercice n° 3: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x^2} & g(x) &= \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} & h(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ k(x) &= \cos(x) \sin^2(x) & l(x) &= \frac{1}{x \ln x} & m(x) &= 3x\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

Exercice n° 4: Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$, $I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}$, $I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x^2)}$, $I =]1, +\infty[$.

Exercice n° 5: Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(3x)) \, dx, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) \, dx, \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \, dx.$$

Exercice n° 6: Calculer les intégrales suivantes

1. $I = \int_2^3 \frac{2x}{1-x^2} \, dx.$
2. $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)} \, dt.$
3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan(x) \, dx.$
4. $L = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$

Exercice n° 7: Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties.

1. $I = \int_0^{2\pi} x \cos(3x) \, dx.$
2. $J = \int_0^2 te^{\frac{t}{2}+2} \, dt.$
3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+4) \sin(2x) \, dx.$
4. $L = \int_{-1}^2 2t^3 e^{t^2} \, dt.$

Je me perfectionne !

Exercice n° 8: Calculer par intégration par parties les intégrales suivantes.

$$1. I = \int_0^\pi \sin(x) e^{3x} dx.$$

$$2. J = \int_0^1 e^{-2t} (1 + t + t^2) dt.$$

$$3. K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) e^\theta d\theta.$$

Exercice n° 9: Déterminer les primitives des fonctions suivantes préciser l'intervalle.

$$1. f : x \mapsto (2x + 1) \ln(x).$$

$$3. h : x \mapsto x^2 \cos(3x).$$

$$2. g : \theta \mapsto \frac{\theta}{\cos(\theta)^2}.$$

$$4. k : x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice n° 10: Décomposition en éléments simples.

1. (a) Montrer qu'il existe des nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 1 et 2, on ait :

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

(b) En déduire la valeur de $K = \int_4^5 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$.

2. (a) Montrer qu'il existe des nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 2, on ait :

$$\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{(x - 2)^2}$$

(b) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 4} du$.

Exercice n° 11:

Calculer l'intégrale $\int_{-1}^2 |x^2 - x| + 2x dx$.

Exercice n° 12: Utilisation de l'intégration en biologie.

Une population de bactéries croît au cours du temps à la vitesse de $v(t) = 10^2 e^{0,1t}$ par individus par heures. Si au début de l'expérience, il y a $W(0) = 10^3$ individus dans la population, alors au bout de T heures le nombre d'individus est

$$W(T) = \int_0^T v(t) dt + W(0).$$

1. Calculer le nombre d'individu après une heure ?
2. Calculer le nombre d'individu après 2 heures ?

Exercice n° 13: Utilisation de l'intégration en biologie.

L'acte de respirer est cyclique. De plus, une respiration complète depuis le début de l'inhalation jusqu'à la fin de l'expiration, dure environ 5s. Le débit de l'air qui entre dans les poumons ne dépasse pas $0,5L/s$ environ. On peut modéliser le débit d'air qui entre ou sort des poumons par la fonction $d(t) = \frac{1}{2} \sin(\frac{2\pi t}{5})$.

Sur la base de ce modèle, si l'individu a l'instant $T=0$ vide ses poumons, le volume de l'air (en Litre) dans les poumons au moment T (en seconde) est

$$V(T) = \int_0^T d(t) dt.$$

1. Calculer le volume d'air au bout de 2,5 secondes, puis au bout de 5 secondes.
2. Etudier les variations du volume d'air au cours du temps.
3. Le modèle correspond il à l'observation ?

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 14: adapté d'un sujet de l'ESC 1997.

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx$

Partie A : premiers calculs

1. Calculer I_0 .
2. Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B : convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $I_n \geq 0$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, on a l'inégalité $\ln(x)^{n+1} \leq \ln(x)^n$.
 - (c) En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Partie C : recherche de la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1, e]$ par $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{e}$.
 - (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[1, e]$. On dressera notamment son tableau de variations.
 - (b) En déduire que $\forall x \in [1, e], \quad 0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$.
2. En utilisant la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e^3 - e^{-n}}{n+3}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie D : vitesse de convergence de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

Exercice n° 15:

Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha(t) = t e^{-\alpha|t|}$.
On note F_α la primitive de la fonction f_α s'annulant en 0.

1. Montrer que la fonction f_α est impaire.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^x f_\alpha(t) dt$ (on distinguera les cas $x \geq 0$ et $x < 0$).
3. En déduire que, pour tout nombre réel x , on a :

$$F_\alpha(x) = -\frac{|x|}{\alpha} e^{-\alpha|x|} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha^2}$$

4. Déterminer la limite de la fonction F_α en $+\infty$.
5. Justifier l'existence d'un nombre réel strictement positif α tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-\alpha|t|} dt = 1$.