

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 1$
2. $2f' + 4f = -3$
3. $\frac{d[A]}{dt} + k[A] = 0$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 2:

Résoudre les équations différentielles suivantes sur le domaine indiqué :

1. $y' + 3xy = 0$ sur $\mathbb{R}$;
2. $y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
3. $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
4. $y' + (t^3 + 4t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' + \frac{1}{x \ln x}y = 0$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice n° 3: méthode de la variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes sur le domaine indiqué en utilisant éventuellement la méthode de variation de la constante :

1. $y' - xy = x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $x^3 y' + xy - e^{\frac{1}{x}} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
3. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
4. $y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{(1+x)^3}$ sur $] -1, +\infty[$;
5. $y' - e^x y = e^x$ sur $\mathbb{R}$;
6. $ty' + y = e^t$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
7. $(1 - x^2)y' + 2xy = \frac{(1-x^2)^2}{x+2}$ sur $] -1, 1[$.

Exercice n° 4:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 5y = 0$
2. $\ddot{a} + \dot{a} - 6a = 2$.
3. $y'' + y = 3$.
4. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 1$
5. $f'' - 2f' = -5$
6. $y'' - 2y' + y = 0$
7. $z'' = 4$.

Exercice n° 5:

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$, entre parenthèses on donne la forme d'une solution particulière :

1. $y'' + y' = 3 + 2x$ (polynôme de degré 2);
2. $y'' - 6y' + 9y = (2x + 1)e^{3x}$ ($x^2 P(x)e^{3x}$ avec P polynôme de degré 1);
3. $y'' - y = \cos(x)$; ($a \cos(x) + b \sin(x)$)
4. $y'' + 4y' + 4y = -e^x + e^{-2x}$ ($a e^x + P(x)e^{-2x}$ avec P polynôme de degré 2);
5. $y'' + 3y' + 2y = (x - 1)e^{-x}$ ($P(x)e^{-x}$ avec P polynôme de degré 2);

Exercice n° 6: principe de superposition

Résoudre les équations différentielles suivantes sur le domaine indiqué

1. $y' + y = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$;
2. $y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{x} + x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n° 7:

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} 3y' + 4y = -1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} f'' + 4f = 1 \\ f(0) = -\frac{7}{4} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice n° 8:

Résoudre les problèmes de Cauchy suivant en utilisant la méthode la plus adaptée :

1. $y' \cos(x) - y \sin(x) = 0$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ avec $y(0) = 1$;
2. $x \ln(x)y' - y = 4$ sur $]1, +\infty[$ avec $y(e) = 1$;
3. $y' + xy = 2x$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice n° 9:

Déterminer la solution du problème de Cauchy suivant (une solution particulière pourra être cherchée sous la forme $a \cos(x) + b \sin(x)$) :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Je me perfectionne !

Exercice n° 10: Croissance d'un individu

Le modèle de croissance proposé par Bertalanffy en 1938 repose sur le fait que la taille d'un être vivant (animal ou végétal) atteint une valeur maximale L et que sa vitesse de croissance est proportionnelle à la taille manquante.

1. Si $y(t)$ désigne la taille d'un individu après t unités de temps, justifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $y'(t) + ky(t) = kL$.
2. Résoudre l'équation différentielle précédente.
3. Une espèce de maïs qui atteint 1,80 m de hauteur, sort de la terre le 1^{er} juillet (temps $t = 0$) et atteint la moitié de sa taille le 15 juillet.
 - (a) Donner une formule explicite de sa taille $f(t)$ en fonction du temps t (t est exprimé en jours et $f(t)$ en cm).
 - (b) À quelle date la maïs aura-t-il atteint sa taille maximale à 2 cm près ?

Exercice n° 11: loi de refroidissement

La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant.

1. Traduire cette loi par une équation différentielle vérifiée par la température T du corps.
2. Dans une pièce où la température est de 20°C, une personne verse du café à 80°C dans une tasse. Deux minutes plus tard, le café est à 60°C. Au bout de combien de temps la personne pourra boire son café, sachant qu'elle le consomme généralement à 40°C ?

Exercice n° 12: désintégration du carbone 14

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux de carbone 14 présents dans un fragment d'os à dater. La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à la quantité de carbone 14 encore présente dans le fragment d'os. On note λ le coefficient de proportionnalité.

1. De quel signe est λ ?
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par N et la résoudre.
3. Déterminer, en fonction de λ , le temps $t_{0,5}$ au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié. Ce temps $t_{0,5}$ est appelé la demi-vie ou période du carbone 14.
4. Le carbone est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5730 ans. Si un fragment d'os contient 71% de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?

Exercice n° 13: Extinction rapide d'une population

Pour décrire l'évolution d'une population en extinction (dans le cadre de calculs d'assurances vie), B. Gompertz a proposé en 1925 le modèle suivant : si $N(t)$ est le nombre d'individus en vie à l'instant t , alors

$$N'(t) = -kN(t)[H - \ln(N(t))]$$

où H et k sont des constantes strictement positives.

1. Soit y une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs strictement positives solution de l'équation différentielle $y' = -ky(H - \ln y)$. On pose $z = \ln y$. Montrer que la fonction z est dérivable sur $[0, +\infty[$ et exprimer z' en fonction de z .
2. En déduire l'expression de $z(t)$ en fonction de t .
3. En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de t .

Exercice n° 14: équation différentielle à paramètre

Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}^*$:

$$my'' - (m^2 + 1)y' + my = 0$$

Exercice n° 15: oscillateur avec amortissement

On considère l'équation différentielle d'un oscillateur avec amortissement :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$$

où $\omega_0 > 0$ est la pulsation propre et Q est le facteur de qualité.

1. Résoudre cette équation différentielle en distinguant trois cas suivant les valeurs de Q .
2. Chacun des trois cas précédents correspond à un régime de fonctionnement différent. Identifier le régime faiblement amorti (ou pseudo-périodique), le régime amorti (ou apériodique) et le régime critique.

Exercice n° 16: systèmes différentiels

Résoudre le système différentiel suivant (on se ramènera à une équation différentielle dont une solution particulière s'écrit sous la forme $ae^t + be^{-t}$) :

$$\begin{cases} x'(t) + y(t) = e^t \\ x(t) - y'(t) = e^{-t} \end{cases} ;$$

Exercice n° 17: modèle de Gompertz

On veut résoudre l'équation différentielle

$$y' = 3y \ln \left(\frac{100}{y} \right)$$

On se place sur un intervalle I où la fonction y est à valeurs dans $]0, 100[$.

1. Montrer que

$$(E) \iff -\frac{1}{3} \times \frac{-\frac{y'}{y}}{\ln(100) - \ln(y)} = 1$$

2. Résoudre (E) .

Exercice n° 18: équation différentielle avec intégrale

Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t) dt$$

Exercice n° 19: systèmes différentiels

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + t^2 \\ y'(t) = y(t) + 2z(t) + t^2 \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Exercice n° 20:

1. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z = xy$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2$ en posant $x = e^t$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 21:

Dans cet exercice, on étudie un modèle de croissance de population proposé par Verhulst en 1840. Dans son modèle, il fait l'hypothèse que les taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines du temps. En notant N la fonction représentant la taille de la population, il obtient ainsi l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N'(t) = [a - bN(t)]N(t) \quad (\text{V})$$

où a et b sont deux constantes indépendantes du temps t telles que $a > 0$ et $b \geq 0$. La taille initiale est notée N_0 (au lieu de $N(0)$). On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $N(t) > 0$.

1. On suppose dans cette question que $b = 0$.
 - (a) Résoudre alors l'équation différentielle (V) (en exprimant la solution en fonction de N_0).
 - (b) Calculer alors la $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Quelle interprétation peut-on en faire? Le modèle proposé est-il satisfaisant?
2. On suppose désormais que $b > 0$. On notera K la constante $\frac{a}{b}$. On l'appelle la *capacité d'accueil du milieu*. On suppose aussi qu'il existe une solution N à l'équation (V). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose alors $y(t) = \frac{1}{N(t)}$.
 - (a) Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
 - (b) En déduire alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-at} + 1}$$

- (c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Pourquoi la constante K est-elle appelée « la capacité d'accueil du milieu »?

Exercice n° 22:

Le but de cet exercice est de trouver l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 1 \quad (\text{E})$$

Soit $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E). On lui associe la fonction z définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $z(x) = x^2y(x)$.

1. Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer z' et z'' en fonction de y , y' et y'' .
2. Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle.

$$z'' - z = 1 \quad (\text{E})$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.