

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Identifier les suites suivantes et exprimer leur terme général en fonction de n .

$$1. \begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_1 = \sqrt{5} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3 + u_n \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} v_0 = -7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{10}v_n \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} b_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{3}{7}b_n \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} z_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = -z_n \end{cases}$$

Exercice n° 2: Calculer les sommes suivantes :

$$1. A = 1 + 2 + 3 + \dots + 500$$

$$2. B = 6 + 8 + 10 + \dots + 150$$

$$3. C = 8 + 13 + 18 + \dots + 1998 + 2003$$

$$4. D = 5 + 10 + 20 + 40 + \dots + 5120$$

$$5. E = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \dots + 2^{20}$$

$$6. F = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \text{ (où } x \in \mathbb{R})$$

Exercice n° 3: Identifier les suites suivantes et donner leur terme général en fonction de n

$$1. \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} b_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = -b_n + 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} a_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = -2a_n + 1 \end{cases}$$

Exercice n° 4: Identifier les suites suivantes et exprimer leur terme général en fonction de n .

$$1. \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} v_0 = 2, v_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = -v_{n+1} + 12v_n \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} b_1 = -1, b_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_0 = -5, u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_{n-1} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = b_{n+1} - b_n \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} z_0 = \sqrt{3}, z_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+2} = 2\sqrt{3}z_{n+1} - 4z_n \end{cases}$$

Exercice n° 5: Modélisations

Construire dans chaque cas une suite modélisant la situation proposée et répondre à la question posée.

1. Datation au carbone 14 :

Quand une plante ou un animal est vivant, son organisme contient un taux de Carbone 14 fixe. Lorsqu'il meurt, la quantité de carbone 14 qu'il contient diminue progressivement.

Tous les ans il perd 0,0121 % de son carbone 14.

Si on retrouve un os qui contient la moitié de son carbone 14 initial, quel âge a-t-il ?

2. Génétique :

La couleur du pelage d'une race de lapin est codé par un gène possédant deux allèles : A (dominant codant pour la couleur blanche) et a (récessif codant pour la couleur marron). Ce gène est susceptible de mutation avec réversion. Le gène A mute en a avec un taux $\alpha = \frac{1}{5}$ et le gène a mute en A avec un taux $\beta = \frac{1}{10}$. On considère une population de lapins contenant initialement $\frac{1}{4}$ de lapins blancs.

A très long terme quelle sera la proportion de lapins blancs dans la population ?

3. Forage :

Pour creuser un puits, le premier mètre coûte 20 €. Chaque mètre suivant coûte 10% de plus que le précédent car le forage devient plus difficile. Combien coûtera un forage de 80m ?

4. Coloriage :

On considère un carré de côté 1m. On le partage en 9 carrés égaux et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non colorié, on réitère le procédé. On pourra noter u_n l'aire hachurée après l'étape n . Déterminer l'aire hachurée si on continue indéfiniment.

Je me perfectionne!

Exercice n° 6:

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs avec $\beta \neq 1$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \alpha(u_n)^\beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , u_n est bien défini et est strictement positif.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\ln(u_{n+1})$ en fonction de $\ln(u_n)$.
3. Exprimer alors $\ln(u_n)$ en fonction de n .
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice n° 7:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence (*non linéaire*) d'ordre 2 suivante

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n^2} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n^2$.

Déterminer la nature de la suite (v_n) et exprimer le terme général v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice n° 8:

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + n + 3 \end{cases}$$

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de terme général s'écrit $u_n = an + b$. Déterminer a et b pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = x_n - u_n$. Déterminer une relation entre w_{n+2} , w_{n+1} et w_n .
3. En déduire l'expression de w_n puis celle de x_n en fonction de n .

Exercice n° 9:

On considère la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} z_0 = 1, z_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+2} = 2z_{n+1} + 3z_n + 2^n \end{cases}$$

1. Soient $(\alpha, r) \in \mathbb{R}^2$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de terme général $v_n = \alpha r^n$. Déterminer α et r pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = z_n - v_n$. Déterminer une relation entre y_{n+2} , y_{n+1} et y_n .
3. En déduire l'expression de y_n puis celui de z_n en fonction de n .

Exercice n° 10:

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) si $a = -3$?
2. On suppose maintenant et dans les questions suivantes que $a \geq 0$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$
 - (a) Justifier que la suite (v_n) est bien définie.
 - (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - (c) En déduire u_n en fonction de n .

Exercice n° 11:

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1} + u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Etudier la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ et en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 12: Etude d'une suite non linéaire.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{4 - u_n^2}}$$

Dans cet exercice, on admettra que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \sqrt{3}$$

L'objectif est de trouver l'expression de u_n en fonction de n .

1. Écrire en **python** une fonction **suite** qui prend en paramètre l'indice n et renvoie la valeur de u_n .
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n^2$. Calculer v_0 et expliciter la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. (a) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = \frac{1}{v_n}$. Justifier que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = 4z_n - 1$$

- (b) Calculer z_0 et donner l'expression de z_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice n° 13: Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

Le but de ce problème est de déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n , on pose $x_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Déterminer x_0 et x_1 .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = x_n$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$x_n = \frac{-1 + 3(-1)^n}{2}$$

4. (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$.
(b) Écrire une fonction `python` de paramètre n qui calcule la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1+3(-1)^k}{2}$$

5. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .