

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Etude de fonctions

- On considère la fonction $c : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
Déterminer $c([0; 2])$, $c([-1; 0])$, $c([-2; 2])$, $c([-1; 3])$ puis de manière générale $c([a, b])$ pour $a < b$.
- On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 2x + 2 \end{cases}$
Etudier les variations de f puis déterminer les ensembles suivants : $f([0; 1])$, $f([0; 2])$, $f([0; 3])$.
- On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2 \end{cases}$
Etudier les variations de g puis déterminer les ensembles suivants : $g([-1; 1])$, $g([0; 2])$, $g([1; 3])$.
- On considère la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-2}{x+1} \end{cases}$
Etudier les variations de h puis déterminer $h(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Exercice n° 2: Fonctions trigonométriques

Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]\right)$.

Exercice n° 3: Les applications suivantes sont-elles injectives ?

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ | 4. $j : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ | 7. $m : \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ |
| 2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ | 5. $k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x^2) - \ln(3x) \end{cases}$ | 8. $n : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$ |
| 3. $h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 3 \end{cases}$ | 6. $l : \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \sqrt{\sin(x)} \end{cases}$ | 9. $p : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$ |

Exercice n° 4: Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ | 4. $j : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x \end{cases}$ | 7. $m : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$ |
| 2. $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 5 \end{cases}$ | 5. $k : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{e^x} \end{cases}$ | 8. $p : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [-2, 2] \\ x \mapsto \cos(x) + \sin(x) \end{cases}$ |
| 3. $h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 3 \end{cases}$ | 6. $l : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x \end{cases}$ | <i>Conseil : transformer l'écriture de $p(x)$.</i> |

Exercice n° 5:

Soient $f : x \mapsto \frac{1}{x} - x^3$ et $g : x \mapsto \ln(x) - x$

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- Etudier la fonction f et déterminer $f(\mathcal{D}_f)$.
- Montrer que $f : \mathcal{D}_f \rightarrow f(\mathcal{D}_f)$ n'est pas injective.
- Reprendre les mêmes questions pour g .

Exercice n° 6: Prouver que les applications suivantes sont bijectives. Pour f et h , déterminer leur réciproque.

$f : \begin{cases} [0; +\infty[\rightarrow [-5; +\infty[\\ x \mapsto x^2 - 5 \end{cases}$	$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) + 2x \end{cases}$	$h : \begin{cases}]6; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{1}{x-6} \end{cases}$
---	---	--

Exercice n° 7:

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow]-1; 1] \\ x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$

Prouver que f réalise une bijection et déterminer son application réciproque.

Exercice n° 8:

Soit f l'application définie par $x \mapsto \frac{1-x}{x+2}$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Déterminer $f(\mathcal{D}_f)$.
3. Montrer que $f : \mathcal{D}_f \rightarrow f(\mathcal{D}_f)$ est injective.
4. Montrer que $f : \mathcal{D}_f \rightarrow f(\mathcal{D}_f)$ est surjective.
5. f admet-elle une application réciproque ? si oui la déterminer.

Exercice n° 9: fonctions indicatrices

Soient $A = \mathbb{Z}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} | (x+3)(x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}) = 0\}$

1. Quelle est la définition de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$, de $\mathbb{1}_B$?
2. Déterminer $\mathbb{1}_A(4)$, $\mathbb{1}_A(\pi)$, $\mathbb{1}_A(-5)$.
3. Déterminer $\mathbb{1}_B(0)$, $\mathbb{1}_B(1)$, $\mathbb{1}_B(-3)$, $\mathbb{1}_B(\sqrt{2})$, $\mathbb{1}_B(-\sqrt{2})$.
4. Déterminer $\mathbb{1}_{A \cap B}(1)$, $\mathbb{1}_{A \cap B}(\sqrt{2})$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(\sqrt{2})$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}(1)$.
5. Déterminer les antécédents de 0 par $\mathbb{1}_{\bar{A}}$.

Je me perfectionne!

Exercice n° 10: Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes

1. $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \operatorname{Re}(z) \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \bar{z} \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 \end{cases}$
4. $h_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 \end{cases}$
5. $k : \begin{cases} E \rightarrow E \\ P \mapsto P' \end{cases}$
où E l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels et P' désigne le polynôme dérivé de P .
6. $l : \begin{cases} F \rightarrow E \\ P \mapsto P' \end{cases}$.
où $F = \{P \in E | P(0) = 1\}$.

Exercice n° 11:

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1; +\infty[$ et déterminer sa réciproque f^{-1} .

Exercice n° 12:

Soit f une application de E dans F . Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice n° 13:

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G . Montrer que :

1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
3. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
5. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
6. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 14:

On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \end{cases}$$

1. Etudier la parité de f .
2. Déterminer le tableau de variations de f . On fera notamment apparaître les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?
4. Déterminer $f([1, +\infty[)$, $f(\mathbb{R}^*)$ et $f([-1, 0[\cup]0, 1])$.
5. (a) L'application f est-elle injective ?
(b) L'application f est-elle surjective ?
6. On considère maintenant l'application

$$h : \begin{cases} [1, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \end{cases}$$

Justifier que l'application h admet une réciproque que l'on déterminera.

Exercice n° 15:**Partie A**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{-1}{3(x^2 + 1)}$$

1. Dresser le tableau de variation de f et en déduire $f(\mathbb{R})$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R})$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.
3. Déterminer un intervalle I telle que $f : I \longrightarrow f(I)$ soit bijective et déterminer sa réciproque.

Partie B : un peu d'informatique

1. Écrire une fonction `python` nommée `fonction` qui prend en entrée un nombre réel x et qui renvoie la valeur de $f(x)$.
2. Que faut-il taper dans la console pour obtenir l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction f ?
3. Expliquez ce que fait le programme suivant :

```
from math import *
def programme(a,eps) : #a est un réel entre -1/3 et 0 et eps un réel positif
    x=0
    while (abs(fonction(x)-a)>eps) :
        x=x+10**(-4)
    return x
```