

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Répondre à chaque question après avoir identifié de quel type de dénombrement il s'agit :

1. Combien de mains de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
2. De combien de façon peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?
3. Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont écrites les lettres de l'alphabet.
 - a) On tire une poignée de 4 jetons que l'on aligne pour former un mot de 4 lettres. Combien de mots sont possibles ?
 - b) On tire un jeton, on note la lettre obtenue, on remet le jeton et on répète l'opération 4 fois. Combien de mots de 4 lettres peut-on obtenir ?
 - c) On tire une poignée de 4 lettres que l'on aligne dans l'ordre alphabétique. Combien de mots obtient-on ?
4. Une plaque minéralogique est composée de 2 lettres, 3 chiffres puis 2 lettres. Combien de plaques différentes sont possibles ?
5. On joue 4 fois de suite à pile ou face. Combien de parties sont possibles ?
6. Combien existe-il d'anagrammes du mot ABRICOT ?
7. De combien de façons peut-on ranger 4 objets dans 3 tiroirs ?
8. De combien de façons peut-on disposer 4 personnes sur 6 chaises (avec au plus une personne par chaise)
9. Une grille de loto comporte 49 numéros et on doit en cocher 5. Combien de grilles sont possibles ?
10. 10 enfants jouent à cache cache dans une maison de 4 pièces. De combien de manière peuvent-ils se répartir dans les 4 pièces ?

Exercice n° 2:

Soit A l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun 0.

Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

1. A .
2. A_1 ensemble des nombres de A ayant 6 chiffres différents.
3. A_2 , ensemble des nombres pairs de A .
4. A_3 , ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre dans lequel ils sont écrits)

Exercice n° 3:

On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1. On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ?
2. On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
 - (a) De combien de façons peut-on les ranger ?
 - (b) de combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleurs ?
 - (c) Même question mais seule les rouges sont groupées.

Exercice n° 4:

On appelle main tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains différentes contenant au moins un pique ?
3. Combien y a-t-il de mains différentes contenant au plus un pique ?
4. Combien y a-t-il de mains différentes contenant exactement un as et deux piques ?

Exercice n° 5:

Une urne contient cinq boules noires numérotées de 1 à 5, quatre boules rouges numérotées de 6 à 9 et deux boules blanches numérotées 10 et 11. On prélève successivement et sans remise trois boules dans l'urne. Combien y a-t-il de résultats :

1. au total ?
2. comportant trois boules rouges ?
3. comportant au moins une boule rouge ?
4. comportant une boule rouge, puis une noire, puis une blanche ?
5. comportant trois boules de trois couleurs différentes ?
6. comportant une blanche et deux noires ?
7. dans lesquels le plus grand des numéros obtenus est le troisième ?

Exercice n° 6:

Un sac contient cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1. On tire successivement et avec remise 3 jetons. Combien y a-t-il de tirages :
 - a) au total ?
 - b) ne contenant pas de jeton vert ?
 - c) ne contenant que des jetons verts ?
 - d) contenant au plus deux jetons verts ?
 - e) contenant exactement un jeton vert et exactement un jeton numéroté 2 ?
2. Mêmes questions si on tire les trois jetons simultanément.

Je me perfectionne !

Exercice n° 7:

On dispose de trois tiroirs pour ranger n chemises, toutes différentes ($n \geq 3$). De combien de façons peut-on le faire :

1. au total ?
2. si on veut que deux tiroirs exactement soient occupés ?

Exercice n° 8:

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathcal{P}([1, 3]) \rightarrow [0, 3] \\ X \mapsto \text{Card}(X) \end{cases}$

Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Exercice n° 9:

Déterminer le nombre d'applications surjectives de $[1, 5]$ dans $[1, 4]$.

Exercice n° 10:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y = n$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

Exercice n° 11: ARN et dénombrement

En biologie, l'ARN (acide ribonucléique) est une molécule constituée d'un enchainement de nucléotides : Adénine (A), guanine (G), cytosine (C) et uracile (U)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle :

- **codon** : une succession de 3 nucléotides parmi A, G, C et U ;
- **brin** : un assemblage ordonné de n codons ;
- **codon d'initiation** : le codon AUG ;
- **codon de terminaison** : l'un des trois codons UAG, UGA ou UAA .

1. (a) Justifier qu'il existe 64 codons différents.
(b) Combien y aurait-il de codons si ceux-ci n'étaient constitués que de deux nucléotides parmi A, G, C et U ? Commenter sachant que ces codons servent à coder 20 acides aminés.
2. Combien existe-t-il de brins différents ?
3. (a) Combien de brins possèdent au moins un codon d'initiation ?
(b) Combien de brins possèdent au moins un codon de terminaison ?
(c) Combien de brins possèdent exactement un codon d'initialisation et un codon de terminaison ?

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 12:

Question préliminaire : Écrire un script Python correspondant à une fonction récursive **factorielle**, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de $n!$.

Un groupe d'enfants dans un centre de loisirs est constitué de 5 filles : Audrey, Béatrice, Claire, Delphine, Elisabeth et de 4 garçons : Arnaud, Bruno, Christian et David.

1. Partie A : Tous les matins on tire au sort trois enfants en tirant successivement et sans remise trois papiers dans un sac contenant les prénoms de chaque enfant. Le premier est chargé de ranger les jouets après la récréation, le deuxième doit débarasser la table à la cantine et le troisième doit balayer la salle à la fin de la journée.
 - (a) Combien de tirages sont possibles au total ?
 - (b) Combien de tirages peuvent donner des équipes de corvées uniquement féminines ?
 - (c) Combien de tirages sont constitués d'équipes d'au plus deux filles ?
 - (d) Combien de tirages donneront une équipe contenant exactement une fille et exactement un enfant dont le prénom commence par D ?
2. Partie B :
L'animateur décide de changer les règles pour les corvées. Tous les matins on tire au hasard une poignée de trois papiers. Les enfants de l'équipe ainsi constituée décident alors eux-même de la répartition des tâches.
 - (a) Combien d'équipes peut-on constituer au total ?
 - (b) Combien d'équipes uniquement masculines peut-on créer ?
 - (c) Combien d'équipes contiendront un binôme ayant les mêmes initiales ?
 - (d) Combien d'équipes contiendront exactement un garçon et exactement un enfant dont l'initiale est A ?

3. Partie C :

Une nouvelle activité "trampoline" est mise en place au centre de loisir mais par mesure de sécurité, le trampoline doit être utilisé par un enfant à la fois. L'animateur décide donc d'établir en début de semaine un planning d'utilisation du trampoline. Pour cela il tire au hasard successivement et avec remise 5 prénoms. Le premier enfant tiré au sort utilisera le trampoline le lundi, le second le mardi, etc, le dernier l'utilisant le vendredi.

- (a) Combien de plannings différents sont possibles ?
- (b) Combien de plannings donneront droit à un même enfant d'utiliser le trampoline toute la semaine ?
- (c) Combien de plannings prévoiront une utilisation du trampoline uniquement pour des garçons ?
- (d) Combien de plannings ne donneront pas lieu à une utilisation du trampoline par le même enfant plusieurs fois dans la semaine ?
- (e) Combien de plannings contiendront au plus 2 fois le même enfant ?