

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Quand c'est le cas, déterminer leur écriture cartésienne, leur écriture paramétrée et leur écriture sous forme de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$;
4. $D = \{(1 + a, a); a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 2:

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^4$ pour le dernier. Quand c'est le cas, déterminer leur écriture cartésienne, leur écriture paramétrée et leur écriture sous forme de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs :

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$;
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y + z = 0\}$;
3. $C = \{(2a + b, 3a - b, a); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$;
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x = y \text{ et } y = 3z\}$;
5. $E = \text{vect}((1, 2, 3), (0, 1, 1))$;
6. $F = \{(a + b, a - b, 2b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$;
7. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 1\}$;
8. $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$.

Exercice n° 3:

1. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles des familles génératrices de $\mathbb{R}^3$?
 - (a) $\mathcal{F}_1 = ((1, -1, -1), (2, -1, 1))$.
 - (b) $\mathcal{F}_2 = ((1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1))$;
 - (c) $\mathcal{F}_3 = ((1, -1, -1), (1, 1, 1), (3, 1, 1))$;
2. La famille de vecteurs $\mathcal{G} = ((3, 1), (-1, 2), (1, -1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
3. La famille $\mathcal{H} = ((1, 1 - i), (1 + i, 1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{C}^2$?

Exercice n° 4:

1. Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, m)$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m , on a $w \in \text{vect}(u, v)$.
2. Même question avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, m, -1)$ et $w = (m, 1, m)$.

Exercice n° 5:

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées?

1. $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$;
2. $u = (0, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 1)$;
3. $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0)$;
4. $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$, $z = (1, 1, 1)$;
5. $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$, $w = (4, -2, 1)$.

Exercice n° 6:

1. On donne $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, m, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, m, 1)$, $u_4 = (1, 0, 0, m)$. Pour quelles valeurs du nombre réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre?
2. Déterminer l'ensemble des nombres réels k tels que la famille $((1, k, 2), (-1, 8, k), (1, 2, 1))$ soit liée dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 7:

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (1, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Exercice n° 8:

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $A = \text{vect}((3, 1, -2), (5, -1, -4), (-1, 5, 2))$;
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y = 0\}$;
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x - 2y + 6z = 0 \text{ et } -2x + y - 3z = 0\}$
4. $D = \text{vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 2, 2), (1, -1, 1))$;
5. $E = \{(a + b, a - b, 3a) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$;
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 3y - z = 0 \text{ et } 2x - 5y + 2z = 0 \text{ et } 3x - 7y + 5z = 0\}$;
7. $G = \{(a - b - c, -2a + 2b + 2c, 3a + 2b - 2c) ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Exercice n° 9:

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $u = (3, -1)$, $v = (1, 2)$ et $w = (2, 5)$.

1. La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que les familles $\mathcal{B} = (u, v)$ et $\mathcal{C} = (u, w)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $z = (5, -2)$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Que remarque-t-on ?
5. Soit (x, y) un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 10:

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $F = \text{vect}(u, v)$. La famille (u, v) est-elle une base de F ? Quelle est la dimension de F ?
3. Le vecteur $y = (1, 4, 7)$ appartient-il à F ? Si c'est le cas, quelles sont ses coordonnées dans la base (u, v) ?
4. Le vecteur $z = (-1, 6, 9)$ appartient-il à F ? Si c'est le cas, quelles sont ses coordonnées dans la base (u, v) ?
5. Soit (x, y, z) un vecteur de F . Déterminer ses coordonnées dans la base (u, v) de F .

Exercice n° 11:

Dans chacun des cas, montrer que la famille proposée est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z) dans cette base :

1. $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 0))$;
2. $\mathcal{B}_2 = ((0, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 0))$.

Exercice n° 12:

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. Dans $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (0, i, 1))$;
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 4), (2, -2, 8), (1, -3, 4))$;
3. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_3 = ((1, -1, -1), (1, 1, 1), (3, 1, 1))$;
4. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_4 = ((1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (2, 1, 3))$;
5. Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F}_5 = ((1, 3, 2, -1), (3, 1, 3, -2), (5, 1, 9, -3))$.

Exercice n° 13:

Discuter suivant la valeur de λ le rang de la famille $\mathcal{F} = ((\lambda, 1, 1, 1), (1, \lambda, 1, 1), (1, 1, \lambda, 1), (1, 1, 1, \lambda))$.

Je me perfectionne!

Exercice n° 14:

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On considère les ensembles

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - z + t = 0 \text{ et } z + t = 0\}$$

et

$$F = \{(-2a + 5b, a - 4b, a, b) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Mettre E sous forme paramétrée. Trouver une base de E . En déduire la dimension de E .
3. Décrire F à l'aide d'équations cartésiennes. Trouver une base de F . En déduire la dimension de F .

4. Déterminer $E \cap F$.
5. Construire une famille $\mathcal{F}$ en associant les vecteurs de la base trouvée pour E et de celle trouvée pour F . Prouver que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice n° 15:

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(a, a, a, a); a \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. Déterminer la dimension de E et de F .

Exercice n° 16:

Soit $v_1 = (2, -1, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 3)$, $v_3 = (1, 4, 7)$ et $v_4 = (1, 1, 2)$. On pose $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1. Montrer sans calcul que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée
2. Extraire de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) une sous-famille libre de cardinal maximal. Quelle est la dimension de F ? une base de F ?
3. Compléter la sous-famille trouvée en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 17:

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $G \subset F$ ou $F \subset G$.

Exercice n° 18:

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E . Montrer que :

$$a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \Rightarrow (e_1 + a, \dots, e_p + a) \text{ est libre}$$

Exercice n° 19:

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_j)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n)$ soit encore une base de $\mathbb{R}^n$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 20:

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = (2, 1, 0, 4), \quad \vec{v} = (1, 1, -1, -1) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (-3, 0, 1, 2)$$

- (a) Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- (b) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?
- (c) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
- (d) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
- (e) Soit $\vec{e} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (f) Déterminer les coordonnées de $\vec{a} = (1, 1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ et les écrire sous forme matricielle.
2. On pose $H = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
 - (a) Déterminer une base de H et sa dimension.
 - (b) Déterminer une écriture cartésienne de H .
3. On pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0\}$.
 - (a) **Python.**
 - i. Écrire une fonction `python` nommée `vecteur` qui prend en entrée quatre nombres réels `x`, `y`, `z` et `t` et qui renvoie `True` si le vecteur $\vec{u} = (x, y, z, t)$ appartient à G et `False` sinon.
 - ii. Que faut-il écrire dans la console `python` pour tester si le vecteur $\vec{u} = (3, 1, -4, 0)$ appartient à G ?
 - (b) Prouver que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
 - (c) Déterminer une base de G et sa dimension.
4. On considère l'ensemble $Z = G \cap H$.
 - (a) Que peut-on dire de Z ?
 - (b) Déterminer une base et la dimension de Z .

Espaces vectoriels au programme de 2^{ième} année : un avant-goût**Exercice n° 21:**

Soit $E = \{y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; y''' - y'' - y' + y = 0\}$ où $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ trois fois dérivables de dérivées continues. On admet que $(\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel avec $+$ l'addition entre deux fonctions et $\cdot$ la multiplication d'une fonction par un réel.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Chercher les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \mapsto e^{\alpha x}$ est dans E .
3. Soient f_1, f_2, f_3 définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = x e^{-x}$. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?
4. Soit $y \in E$. On pose $z = y' - y$. Montrer que $z'' - z = 0$.
5. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z : x \mapsto Af_1(x) + Bf_2(x)$.
6. Trouver une solution particulière de $y' - y = Af_1 + Bf_2$ sous la forme $x \mapsto axe^x + be^{-x}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^3$.
7. Déterminer une base de E et la dimension de E .