

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Décrire un univers Ω adapté à chacune des expériences suivantes et sur lequel il y a équiprobabilité. Calculer le cardinal de Ω .

1. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire 3 simultanément et on note les numéros.
2. Dans la même urne, on tire successivement et avec remise les 3 boules et on note les numéros dans l'ordre de leur sortie.
3. Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules vertes et 3 boules noires. On tire 3 boules successivement avec remise. On note les couleurs obtenues.
4. On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes.
5. On choisit d'aligner au hasard dans une machine à traire 5 vaches d'un troupeau de 50 vaches.
6. On mélange un jeu de 32 cartes puis on aligne toutes les cartes face visible sur la table.
7. On lance deux dés équilibrés et on note les chiffres obtenus.
8. On lance deux dés équilibrés et on note leur somme.

Exercice n° 2:

Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω . Ecrire en fonction de A, B et C les événements suivants :

- | | |
|--|--|
| 1. E_1 : " les événements A, B et C ont tous les trois lieu ". | 5. E_5 : " seul l'un des trois a lieu ". |
| 2. E_2 : " ils n'ont pas tous les trois lieu ". | 6. E_6 : " Au moins l'un des trois a lieu ". |
| 3. E_3 : " aucun des trois n'a lieu ". | 7. E_7 : " Au moins deux des trois ont lieu ". |
| 4. E_4 : " seul A a lieu ". | 8. E_8 : " au plus deux ont lieu ". |

Exercice n° 3:

On lance deux dés équilibrés. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| A : " On obtient un double 6 ", | C : " On obtient deux chiffres paires ", |
| B : " On obtient un double ", | D : " la somme des chiffres vaut 7 ". |

Exercice n° 4:

Un tiroir contient 12 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 4 chaussettes au hasard. On considère 3 façons de prendre les chaussettes :

1) On les prend simultanément 2) On les prend successivement 3) On tire une chaussette puis on la remet dans le tiroir. Pour chacune de ces façon de tirer quelle est la probabilité d'obtenir :

- | | |
|------------------------|---------------------|
| 1. 2 paires complètes. | 3. Une seule paire. |
| 2. Au moins une paire. | |

Exercice n° 5:

On lance deux fois un dé. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit supérieure ou égale à 7 sachant que :

1. Le premier lancer a donné un 4.
2. Le premier lancer a donné un résultat supérieur ou égal à 4.
3. Le premier lancé a donné 1.
4. Le premier lancé a donné un résultat inférieur ou égal à 4.

Exercice n° 6:

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 3 boules noires. On tire successivement trois boules sans remise. Calculer la probabilité que la première soit noire, la deuxième verte et la troisième noire .

Exercice n° 7:

On dispose de n ($n \geq 4$) sacs indiscernables $S_1, \dots, S_n$. Pour chaque k entre 1 et n le sac S_k contient $n+1$ jetons indiscernables dont k sont gagnants et les autres perdants.

- Le joueur choisit un sac au hasard et y pioche un unique jeton
 - Quelle est la probabilité que le jeton soit gagnant ?
 - Sachant que le joueur a pioché un jeton gagnant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi le sac S_k ?
- En cas d'échec avec le premier jeton on offre au joueur d'autres chances de gagner : il peut piocher à plusieurs reprises un nouveau jeton dans le même sac sans y remettre ceux déjà piochés. Quelle est la probabilité d'avoir dû piocher exactement trois jetons pour gagner.

On se servira du fait que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice n° 8:

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et on considère les événements :

- A : " Le premier lancer donne pile "
- B : " le deuxième lancer donne face "
- C : " le troisième lancer donne pile "
- D : " les trois lancers donnent le même résultat "
- E : " Sur trois lancers, l'un a donné pile et les deux autres face "

- Etudier l'indépendance de A et B ? de A et D ? De A et E ? De D et E ?
- Etudier l'indépendance mutuelle de A, B et C ? De A, B et D ? De C, D et E ?

Exercice n° 9:

Dans un étang, il y a des gardons et des brochets. Paul pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors qu'Alex, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Alex est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Paul. les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Alex qui l'ait pêché.

Exercice n° 10:

Deux éleveurs voisins décident de mettre leurs animaux dans un même champ.

L'exploitant A possède 3 fois plus d'animaux que l'exploitant B.

La répartition des animaux de l'éleveur A est la suivante : 60% de vaches, 16% de chevaux et 24% de poules.

Pour l'éleveur B, on a : 68% de vaches, 12% de chevaux et 20% de poules.

La barrière du champ est restée ouverte. Si on considère que tous les animaux ont la même velléité de sortir :

- Quelle est la probabilité que l'animal qui s'échappe le premier soit un cheval ?
- Si c'est une vache, quelle est la probabilité qu'elle appartienne à l'éleveur A ?
- Si c'est un mammifère, quelle est la probabilité qu'il appartienne à l'éleveur B ?

Je me perfectionne !

Exercice n° 11:

Un candidat participe à un jeu télévisé dans lequel il doit répondre à une série de n questions indépendantes dont la difficulté est croissante : il y a une chance sur k qu'il connaisse la réponse à la k -ième question avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le jeu s'arrête dès lors qu'une réponse incorrecte est donnée par le candidat ou s'il répond correctement à toutes les n questions. On note $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q_k$ l'évènement " le candidat répond correctement à la k -ième question " et G_k l'évènement " le jeu s'arrête alors que le candidat quitte le jeu après avoir donné k réponses correctes ".

- Quelle est la probabilité de Q_1 ?
- Quelle est la probabilité que le candidat remporte le jeu en ayant répondu à toutes les questions ?
- $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $P(G_k)$.

Exercice n° 12:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, a un entier tel que $0 \leq a \leq N$ et p un réel vérifiant $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$.

Une particule située au début du processus au point d'abscisse a se déplace sur un axe aléatoirement, par sauts successifs, indépendants les uns des autres, d'amplitude $+1$ avec la probabilité p et -1 avec la probabilité q . On note x_n l'abscisse de la particule à l'issue du $n^{\text{ème}}$ saut.

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extrémités du segment $[0, N]$.

1. Déterminer x_0 . Quelles sont les valeurs possibles de x_{n+1} en fonction de x_n ?
2. On note d_a la probabilité que le processus s'arrête en 0, étant initialement parti de a .
 - (a) Déterminer d_0 et d_N .
 - (b) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$ on a :

$$d_a = p d_{a+1} + q d_{a-1}$$

- (c) En déduire d_a en fonction de a , N , p et q .
3. Déterminer de même f_a la probabilité que le processus s'arrête en N en partant de a .
 4. Déterminer la probabilité que le processus ne s'arrête pas (donc que pour tout $n \geq 0$, $1 \leq x_n \leq N - 1$)

Exercice n° 13:

Un archer tire sur des cibles situées à 20m et à 50m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois (il alterne les cibles à 20m et les cibles à 50m). La probabilité d'atteindre la cible à 20m est p , la probabilité d'atteindre la cible à 50m est q . On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice n° 14:

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour une machine donnée le technicien a constaté :

- qu'il est intervenu la première semaine
- que s'il est intervenu la $n^{\text{ème}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ème}}$ semaine est égale à $\frac{3}{4}$.
- que s'il n'est pas intervenu la $n^{\text{ème}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ème}}$ semaine est $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement "le technicien intervient la $n^{\text{ème}}$ semaine" et par p_n la probabilité de E_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $p_1, P_{E_n}(E_{n+1}), P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
2. Déterminer $P(E_{n+1} \cap E_n)$ et $P(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$ en fonction de p_n .
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$.
4. Déterminer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Problème 1 (parcours d'une guêpe).

Dans une ruche, deux pièces A et B (une chambre et la salle) sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. À l'instant $t = 0$, une guêpe se trouve dans la pièce A et voudrait sortir à l'air libre. À chaque instant $t = n$ (où $n \in \mathbb{N}$), son trajet obéit aux règles suivantes :

- ★ lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n , alors au temps $n + 1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$;
- ★ lorsqu'elle est dans la pièce B au temps n , alors au temps $n + 1$ elle retourne dans la pièce A avec la probabilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$;
- ★ lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier naturel n , on considère les événements :

- A_n : « La guêpe est dans la pièce A à l'instant n . »
- B_n : « La guêpe est dans la pièce B à l'instant n . »
- S_n : « La guêpe sort à l'air libre à l'instant n . »

et on notera respectivement a_n , b_n et s_n les probabilités associées à ces événements.

Partie A : étude des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Déterminer les valeurs de a_0 , b_0 , s_0 , a_1 , b_1 et s_1 .
2. Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A , quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1 ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{4} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{b_n}{2}$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 2a_n$.
5. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n et b_n en fonction de n .
6. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.
7. (a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $s_{n+1} = s_n + \frac{b_n}{4}$.
 (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{4}$ puis déterminer l'expression de s_n en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Partie B : modélisation informatique

1. En annexe, une ébauche de fonction, écrite en langage `python`, est proposée pour calculer les probabilités a_n , b_n et s_n . Compléter cette fonction.
2. Compléter la fonction écrite en annexe qui simule le trajet de la guêpe jusqu'à sa sortie à l'air libre.
3. À l'aide de la fonction précédente, écrire un programme qui compte le nombre de fois où la guêpe change de pièces.