

## Espaces vectoriels

## 1. première méthode :

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ 

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ x - z + t = 0 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z - t \\ y = z \end{cases}$$

D'où  $F = \{(z - t, z, z, t) | (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$ soit  $F = \text{vect}((1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ Ainsi  $\boxed{F \text{ est le sous espace vectoriel engendré par } \vec{e}_1 \text{ et } \vec{r} = (-1, 0, 0, 1)}$ 

## deuxième méthode :

 $F \subset \mathbb{R}^4$  $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = (x, y, z, t) \in F, \vec{w} = (x', y', z', t') \in F$ Montrons que  $F$  est stable par combinaison linéaire, c'est à dire que  $\lambda\vec{v} + \vec{w} \in F$ .On a  $\lambda\vec{v} + \vec{w} = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ Or  $(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda t + t') = \lambda(x - y + t) + x' - y' + t' = 0$ et  $(\lambda x + x') - (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda(x - z + t) + x' - z' + t' = 0$ Ainsi  $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ 2. D'après la question précédente, on a vu que  $(\vec{e}_1, \vec{r})$  est une famille génératrice de  $F$ .De plus  $\vec{e}_1$  et  $\vec{r}$  ne sont pas colinéaires donc  $(\vec{e}_1, \vec{r})$  est aussi une famille libre.Ainsi  $\boxed{(\vec{e}_1, \vec{r}) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = 2}$ 3.  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  est une famille de 4 vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$  qui est un espace de dimension 4.Donc  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  libre  $\Leftrightarrow \text{Rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) = 4$ 

Or

$$\begin{aligned} \text{Rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi  $\boxed{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}^4}$ 4. De part son écriture,  $\boxed{G \text{ est le sous-espace vectoriel engendré par } (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)}$ Or  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  est une sous famille de  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  qui est libre (puisque c'est une base), elle est donc libre aussi.Ainsi  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  est une famille libre et génératrice de  $G$ , c'est donc une base et  $\boxed{\dim(G) = 3}$

5. Par définition  $G$ , on a

$$G = \{a(0, 1, 1, 1) + b(1, 0, 1, 1) + c(1, 1, 0, 1) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

$$= \{(b + c, a + c, a + b, a + b + c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a + b + c = t \\ b + c = x \\ a + c = y \\ a + b = z \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a + b + c = t \\ b + c = x \\ -b = y - t \\ -c = z - t \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a + b + c = t \\ b + c = x \\ c = x + y - t \\ -c = z - t \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a + b + c = t \\ b + c = x \\ c = x + y - t \\ 0 = x + y + z - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 2t = 0$$

Ainsi  $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z - 2t = 0\}$

6. On a  $-4 + 3 - 3 - 2 \times (-2) = 0$  donc  $\vec{u} \in G$

Puisque  $\vec{u}$  est dans  $G = \text{vect}(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ , on sait qu'il s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$  et  $\vec{e}_4$ .  
Trouvons  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 + c\vec{e}_4 = \vec{u}$ .

$$a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3 + c\vec{e}_4 = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -4 \\ a + c = 3 \\ a + b = -3 \\ a + b + c = -2 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ a + c = 3 \\ a + b = -3 \\ b + c = -4 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ -b = 5 \\ -c = -1 \\ b + c = -4 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ -b = 5 \\ -c = -1 \\ c = 1 \end{cases} \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ -b = 5 \\ -c = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ainsi  $\mathcal{M}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.  $H$  est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$ , il est donc lui-même un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

8. On a  $H = F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + t = 0, x - z + t = 0, x + y + z - 2t = 0\}$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in H &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ x + y + z - 2t = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y + z - 3t = 0 \end{cases} & L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - z = 0 \\ 3z - 3t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi  $H = \{(0, t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$

soit  $H = \text{vect}((0, 1, 1, 1)) = \text{vect}(\vec{e}_2)$

Or  $\vec{e}_2$  est un vecteur non nul, donc libre, et générateur de  $H$ . C'est donc une base de  $H$  et  $\boxed{\dim(H) = 1}$

## Belote et dénombrement

1. (a) Il suffit de choisir la plus haute carte des trois cartes consécutives : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 9 et l'as. Il y a donc 6 choix possibles pour la hauteur de la plus haute carte, et donc 6 possibilités de trois cartes consécutives dans la couleur coeur. Ensuite il faut choisir 5 cartes qui ne sont pas des coeurs soit  $\binom{24}{5}$  possibilités.

Le nombre de mains possibles est donc

$$6 \times \binom{24}{5}$$

- (b) On va dénombrer d'abord le nombre de séries de 5 cartes consécutives. Il suffit de choisir la plus haute carte de la série : il s'agit de n'importe quelle carte entre le valet et l'as. Il y a 4 choix possibles. Ensuite, on choisit l'une des 4 couleurs, ce qui fait 4 choix. Enfin on choisit 3 autres cartes d'une couleur différente des 5 cartes consécutives :  $\binom{24}{3}$  possibilités.

Finalement, le nombre de mains correspondant est

$$4 \times 4 \times \binom{24}{3}$$

- (c) Il y a 8 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (carré d'as, carré de rois,...). Cette hauteur fixée, il faut encore choisir 4 cartes parmi les 28 autres pour compléter la main sans prendre 4 cartes de valeur identique (Il reste 7 possibilités de carré à exclure) :  $\binom{28}{4} - 7$  possibilités.

Le nombre de mains contenant exactement un carré est donc

$$8 \times (\binom{28}{4} - 7)$$

2. (a) Il y a  $\binom{32}{8}$  choix possibles pour le premier joueur, puis  $\binom{32-8}{8} = \binom{24}{8}$  choix possibles pour le deuxième joueur, et encore  $\binom{24-8}{8} = \binom{16}{8}$  pour le troisième. Le dernier joueur prend les 8 cartes restantes. Au total on trouve

$$\binom{32}{8} \binom{24}{8} \binom{16}{8} = \frac{32! \times 24! \times 16!}{8! \times 24! \times 8! \times 16! \times 8! \times 8!} = \frac{32!}{8!^4}.$$

- (b) On choisit une couleur parmi 4 pour le premier joueur, puis une couleur parmi 3 pour le deuxième et enfin une couleur parmi 2 pour le troisième. Cela fait  $4!$  possibilités. On peut aussi argumenter à l'aide du nombre de permutation de 4 couleurs.

- (c) On va distinguer le cas où les quatre joueurs ont la même couleur et le cas où deux joueurs ont la même couleur et deux joueurs n'ont pas la même couleur.

Le premier cas a été dénombré dans la question précédente. Il y a  $4!$  possibilités.

Il reste à traiter le deuxième cas.

On commence par choisir les deux joueurs qui ont la même couleur. Il y a  $\binom{4}{2}$  tels choix. On choisit ensuite une couleur parmi 4 pour le premier joueur, et une couleur parmi 3 pour le deuxième joueur. Il reste pour le 3ème joueur à choisir 8 cartes parmi les 16 restantes sans prendre les 2 tirages des 8 cartes de la même couleur. Le quatrième prend le reste.

On trouve donc :

$$\binom{4}{2} \times 4 \times 3 \times \left( \binom{16}{8} - 2 \right).$$

Au final, on calcule le cardinal d'une union disjointe. Il y a donc  $4! + \binom{4}{2} \times 4 \times 3 \times \left( \binom{16}{8} - 2 \right)$  distributions possibles.