

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 5

Problème 1.

On commence par définir les événements. On note A l'individu choisi est de type **A**, B l'individu choisi est de type **B** et T_1 le test T_1 est positif

Partie A - Un premier test biologique

1. (a) On cherche à calculer $P(T_1)$. Dans le système complet d'événements de probabilités non nulles (A, B) , d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(T_1) = P(A)P_A(T_1) + P(B)P_B(T_1) = 0,55 \times 0,7 + 0,45 \times 0,4 = \frac{11}{20} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{20} \times \frac{4}{10} = \frac{113}{200}$$

(b) $(T_1, \overline{T_1})$ est un système complet d'événements donc $P(\overline{T_1}) = 1 - P(T_1) = 1 - \frac{113}{200} = \frac{87}{200}$

2. (a) On veut calculer $P_{T_1}(A)$. D'après la formule de Bayes, avec $P(T_1) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$ on a

$$P_{T_1}(A) = \frac{P(A)P_A(T_1)}{P(T_1)} = \frac{\frac{11}{20} \times \frac{7}{10}}{\frac{113}{200}} = \frac{77}{113}$$

- (b) On veut calculer $P_{\overline{T_1}}(B)$. D'après la formule de Bayes, avec $P(\overline{T_1}) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a

$$P_{\overline{T_1}}(B) = \frac{P(B)P_B(\overline{T_1})}{P(\overline{T_1})} = \frac{\frac{9}{20} \times \frac{6}{10}}{\frac{87}{200}} = \frac{54}{87}$$

3. Les événements : « l'individu est de type A » et « le test T_1 est positif » ne sont pas indépendants. En effet $P_{T_1}(A) \neq P(A)$. Ce qui implique que $P(A \cap T_1) \neq P(A)P(T_1)$.

4. Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit les événements T_1^i l'individu i à un test T_1 positif.

- (a) On veut calculer $P(T_1^1 \cap T_1^2)$. Comme les personnes sont choisies indépendamment l'un de l'autre, les événements T_1^1 et T_1^2 sont indépendants. On a $P(T_1^1 \cap T_1^2) = P(T_1^1)P(T_1^2) = P(T_1)P(T_1) = \left(\frac{113}{200}\right)^2$.

- (b) On veut calculer $P\left((T_1^1 \cap \overline{T_1^2}) \cup (\overline{T_1^1} \cap T_1^2)\right)$.

Comme les événements sont incompatibles, on a $P\left((T_1^1 \cap \overline{T_1^2}) \cup (\overline{T_1^1} \cap T_1^2)\right) = P(T_1^1 \cap \overline{T_1^2}) + P(\overline{T_1^1} \cap T_1^2)$. Les événements sont indépendants donc $P(T_1^1 \cap \overline{T_1^2}) = P(T_1^1)P(\overline{T_1^2}) = \frac{113}{200} \cdot \frac{87}{200}$ et $P(\overline{T_1^1} \cap T_1^2) = P(\overline{T_1^1})P(T_1^2) = \frac{87}{200} \cdot \frac{113}{200}$.

On obtient $P\left((T_1^1 \cap \overline{T_1^2}) \cup (\overline{T_1^1} \cap T_1^2)\right) = 2 \cdot \frac{87}{200} \cdot \frac{113}{200}$.

Partie B - On ajoute un second test

On note T_2 l'événement l'individu à un test T_2 positif.

- | | |
|--|---|
| 1. • $P_{A \cap T_1}(T_2) = 0,8$
• $P_{A \cap \overline{T_1}}(T_2) = 0,2$ | • $P_{B \cap T_1}(T_2) = 0,6$
• $P_{B \cap \overline{T_1}}(T_2) = 0,1$ |
|--|---|

2. On veut calculer la probabilité $P(A \cap T_1 \cap T_2)$.

D'après la formule de probabilités composées généralisées, sous l'hypothèse $P(A \cap T_1) \neq 0$, on a

$$P(A \cap T_1 \cap T_2) = P(A)P_A(T_1)P_{A \cap T_1}(T_2) = 0,55 \times 0,7 \times 0,8 = \frac{11}{20} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{11}{10} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{77}{250}.$$

3. On veut calculer $P(T_2)$.

On considère le système complet d'événements de probabilités non nulles $(A \cap T_1, A \cap \overline{T_1}, B \cap T_1, B \cap \overline{T_1})$. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(T_2) = P(A \cap T_1)P_{A \cap T_1}(T_2) + P(A \cap \overline{T_1})P_{A \cap \overline{T_1}}(T_2) + P(B \cap T_1)P_{B \cap T_1}(T_2) + P(B \cap \overline{T_1})P_{B \cap \overline{T_1}}(T_2).$$

On applique maintenant la formule de probabilités composées.

$$P(T_2) = P(A)P_A(T_1)P_{A \cap T_1}(T_2) + P(A)P_A(\overline{T_1})P_{A \cap \overline{T_1}}(T_2) + P(B)P_B(T_1)P_{B \cap T_1}(T_2) + P(B)P_B(\overline{T_1})P_{B \cap \overline{T_1}}(T_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned}P(T_2) &= 0,55 \times 0,7 \times 0,8 + 0,55 \times 0,3 \times 0,2 + 0,45 \times 0,4 \times 0,6 + 0,45 \times 0,6 \times 0,1 \\&= \frac{11}{20} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{11}{20} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{9}{20} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{9}{20} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{10} \\&= \frac{308}{1000} + \frac{33}{1000} + \frac{144}{1000} + \frac{27}{1000} \\&= \frac{512}{1000}\end{aligned}$$

Problème 2.

Partie I - Rangées

1. Une rangée est modélisée par une 6-liste d'un ensemble à 12 éléments. Il y a donc 12^6 rangées.
2. On cherche le nombre de rangées avec 2 fleurs, 2 arbustes et 2 plantes grasses.
 - On commence par choisir deux fleurs, ce qui donne 5^2 choix et on choisit 2 places parmi les 6 pour ces fleurs dans la rangée, ce qui donne $\binom{6}{2}$ choix.
 - On choisit ensuite deux arbustes, ce qui donne 4^2 choix et on les place dans la rangée parmi les 4 places restantes, ce qui donne $\binom{4}{2}$ choix.
 - On choisit enfin 2 plantes grasses, ce qui donne 3^2 choix et on les met dans les places restantes.

On a donc $5^2 \times \binom{6}{2} \times 4^2 \times \binom{4}{2} \times 3^2$ rangées avec exactement 2 fleurs, 2 arbustes et 2 plantes grasses.

3. On distingue deux cas selon s'il y a un Dahlia ou non dans la rangée.

Premier cas : si on prend un Dahlia

- On prend un Dahlia (fleur + espèce qui commence par D), ce qui donne 1 choix, et on la place dans la rangée, ce qui donne $\binom{6}{1} = 6$ choix.
- On prend 5 plantes grasses ou arbustes sauf le Daphné, ce qui donne 6^5 choix.
On a donc dans ce cas là $1 \times 6 \times 6^5$ choix.

Deuxième cas : si on ne prend pas un Dahlia.

- On prend un Daphné, ce qui donne 1 choix et on le place, ce qui donne 6 choix.
- On prend une fleur sauf le Dahlia, ce qui donne 4 choix et on la place, ce qui donne 5 choix.
- On prend 4 plantes grasses ou arbustes sauf le Daphné, ce qui donne 6^4 choix.
On a donc dans ce cas là $1 \times 6 \times 4 \times 5 \times 6^4$ choix.

Les deux cas étant disjoints, le nombre de rangées répondant à la question est la somme des 2 cas soit :
 $6 \times 6^5 + 6 \times 4 \times 5 \times 6^4$

Partie II - Présentations de plantes distinctes

1. Une présentation est modélisée par une 5-liste sans répétition donc il y en a $\frac{12!}{7!}$.
2. — On commence par choisir 2 fleurs, ce qui donne $\frac{5!}{3!}$, puis on les place, ce qui donne $\binom{5}{2}$ choix.
 - On choisit ensuite 2 arbustes, ce qui donne $\frac{4!}{2!}$ choix et on les place, ce qui donne $\binom{3}{2}$ choix.
 - On choisit une plante grasse, ce qui donne $\frac{3!}{2!} = 3$ choix.

Ainsi, le nombre de présentations avec exactement 2 fleurs, 2 arbustes et 1 plante grasse est $\frac{5!}{3!} \times \binom{5}{2} \times \frac{4!}{2!} \times \binom{3}{2} \times 3$.

Partie III – Sélection de lots

1. Un lot est modélisé par une 6-combinaison d'un ensemble à 12 éléments. Il y en a donc $\binom{12}{6}$.
2. On considère l'ensemble complémentaire.

Le nombre de lots avec aucune fleur est $\binom{7}{6} = 7$. (Il y a 7 plantes qui ne sont pas des fleurs.)

Ainsi, le nombre de lots avec au moins une fleur est $\binom{12}{6} - \binom{7}{6}$.

3. Le nombre de lots avec au plus une plante grasse est le nombre de lots avec 0 ou 1 plante grasse.

Le nombre de lots avec 0 plante grasse est $\binom{9}{6}$.

Le nombre de lots avec exactement une plante grasse est $\binom{3}{1} \times \binom{9}{5}$. En effet, on commence par choisir une plante grasse, ce qui donne $\binom{3}{1}$. Il reste alors à choisir 5 plantes parmi les 9 qui ne sont pas des plantes grasses.

Comme les deux ensembles sont disjoints, le nombre de lots avec au plus une plante grasse est :

$$\binom{9}{6} + \binom{3}{1} \times \binom{9}{5}$$

IV – Python

```
1. from random import *
def plante() :
    x=randint(0,11)
    L=['A','B','C','D','E']
    if x<=5 :
        return (F,L[x])
    elif x <=9:
        return (A, L[x-5] )
    else :
        return (G, L[x-9])

2. def rangee():
    L=[]
    for i in range(6):
        L.append(plante())
    return L

3. def recherche (L,x):
    for i in range (len(L)):
        if L[i]==x:
            return True
    return False

4. def presentation():
    L=[]
    for i in range(5):
        x=plante()
        while recherche(L,x) :
            x=plante()
        L.append(x)
    return L
```

Problème 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit R_n l'événement « la bactérie est résistante à la génération n » et S_n l'événement « la bactérie est sensible à la génération n ».

(R_n, S_n) forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n) + P_{S_n}(R_{n+1})P(S_n) \\ &= 0,9p_n + 0,2(1 - p_n) \\ &= 0,7p_n + 0,2 \end{aligned}$$

```
2. (a) def suite(n,p0):
    p=p0
    L=[p]
    for i in range(n):
        p=0.7*p+0.2
        L.append(p)
    return L

(b) import matplotlib.pyplot as plt
def trace(n,p0):
    X=[i for i in range(0,n+1)]
    Y=suite(n,p0)
    plt.plot(X,Y,"*")
    plt.show()
```

3. La suite (p_n) est arithmético-géométrique.

Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $L = 0,7L + 0,2 \iff 0,3L = 0,2 \iff L = \frac{2}{3}$.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = p_n - L$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$ et $L = 0,7L + 0,2$.

Par soustraction membre à membre, on obtient : $v_{n+1} = p_{n+1} - L = 0,7(p_n - L) = 0,7v_n$.

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = p_0 - \frac{2}{3}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (p_0 - \frac{2}{3}) \times 0,7^n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = v_n + L = (p_0 - \frac{2}{3}) \times 0,7^n + \frac{2}{3}$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$ car $-1 < 0,7 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (p_0 - \frac{2}{3}) \times 0,7^n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Problème 4.
Partie A.

1. Pour faire cette question, on peut utiliser 2 méthodes. La première utilise la définition d'un sous espace vectoriel. La seconde est de montrer que E est un sous espace engendré par une famille de vecteurs. Cela nous montre que E est un sous espace vectoriel mais nous donne également une famille génératrice de E . Cela nous servira dans la question suivante. Nous utilisons donc la deuxième méthode.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E &\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = z - 2t \\ y = 3z - 2t \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = (z - 2t, 3z - 2t, z, t) \\ &\iff (x, y, z, t) = z(1, 3, 1, 0) + t(-2, -2, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{vect}((1, 3, 1, 0), (-2, -2, 0, 1)) \end{aligned}$$

On a montré que $E = \text{vect}((1, 3, 1, 0), (-2, -2, 0, 1))$ Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Dans la question précédente, on a trouvé une famille génératrice de $E : ((1, 3, 1, 0), (-2, -2, 0, 1))$. Cette famille est une famille composée de 2 vecteurs non colinéaires. Donc cette famille est libre.

La famille $((1, 3, 1, 0), (-2, -2, 0, 1))$ est une base de E . La dimension de E est donc 2.

3. Méthode 1 : Comme $w_1 = (1, 3, 1, 0) + (-2, -2, 0, 1)$ et $w_2 = 2(1, 3, 1, 0) + (-2, -2, 0, 1)$, on a $\text{vect}(w_1, w_2) = \text{vect}((1, 3, 1, 0), (-2, -2, 0, 1)) = E$. Donc (w_1, w_2) est une famille génératrice de E composée de 2 vecteurs. Comme $\dim(E) = 2$, (w_1, w_2) est une base de E .

Méthode 2 : $w_1 \in E$ car $-1 - 1 + 2 = 0$ et $w_2 \in E$ car $-4 + 2 \times 2 = 0$ et $-2 + 2 = 0$. Les vecteurs w_1 et w_2 sont non colinéaires donc ils forment une famille libre de vecteurs de E . Comme $\dim(E) = 2$, (w_1, w_2) est une base de E .

4. Comme $-3 + 1 + 2 = 0$ et $-3 - 1 + 2 \times 2 = 0$, on a $(-3, -1, 1, 2) \in E$.

On cherche maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(-3, -1, 1, 2) = aw_1 + bw_2$. On peut résoudre un système mais avec un peu de recherche, on trouve $(-3, -1, 1, 2) = 3w_1 - w_2$.

Les coordonnées de $(-3, -1, 1, 2)$ dans la base (w_1, w_2) sont $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Partie B.

1. La famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est une famille composée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, il suffit de déterminer a tels que la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) soit libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0 &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + (a+2)\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + a\lambda_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2\lambda_2 + (a+3)\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \lambda_2 + (a+4)\lambda_4 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + (a+4)\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + (a+3)\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 & L_1 \leftrightarrow L_4 \end{cases} \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = 0 &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + (a+4)\lambda_4 = 0 \\ (a+3)\lambda_3 + (-2a-3)\lambda_4 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ 2\lambda_3 + (-4a-10)\lambda_4 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + (a+4)\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_3 + (-4a-10)\lambda_4 = 0 & L_3 \leftrightarrow L_4 \\ (a+3)\lambda_3 + (-2a-3)\lambda_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + (a+4)\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_3 + (-4a-10)\lambda_4 = 0 \\ -2(2a^2 + 9a + 12)\lambda_4 = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - (a+3)L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme le discriminant de $2a^2 + 9a + 12$ est négatif, le système est de rang 4. Il admet une unique solution $(0, 0, 0, 0)$.

La famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est libre.

2. (a) La forme paramétrique de F est

$$F = \{(a + 4b, a + 2b, 2a + b, -a) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Forme Cartésienne : Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = a + 4b \\ y = a + 2b \\ z = 2a + b \\ t = -a \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = a + 4b \\ y - x = -2b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ z - 2x = -7b & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ t + x = 4b & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = a + 4b \\ y - x = -2b \\ 3x - 7y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_2 \\ -x + 2y + t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

La forme cartésienne de F est

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 3x - 7y + 2z = 0 \text{ et } -x + 2y + t = 0\}.$$

(b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E \cap F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - z + 2t = 0 \\ x = a + 4b \\ y = a + 2b \\ z = 2a + b \\ t = -a \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} a + 4b - (a + 2b) + 2(2a + b) = 0 \\ a + 4b - (2a + b) - 2a = 0 \\ x = a + 4b \\ y = a + 2b \\ z = 2a + b \\ t = -a \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ -3a + 3b = 0 \\ x = a + 4b \\ y = a + 2b \\ z = 2a + b \\ t = -a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in E \cap F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x = a + 4b \\ y = a + 2b \\ z = 2a + b \\ t = -a \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a montré que $E \cap F = \{(0, 0, 0, 0)\}$

3. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x, y, z, t) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_4 = (x, y, z, t) &\iff \begin{cases} -\lambda_1 & + & & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & x \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & + & & = & t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 & + & & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & x \\ & & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & x+y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & 5\lambda_4 & = & x+z & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ & & \lambda_2 & & & + & 4\lambda_4 & = & x+t & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 & & & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & x \\ & \lambda_2 & & & + & 4\lambda_4 & = & x+t \\ & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & 5\lambda_4 & = & x+z \\ & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & 6\lambda_4 & = & x+y & L_1 \leftrightarrow L_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 & & & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & x \\ & \lambda_2 & & & + & 4\lambda_4 & = & x+t \\ & & & 3\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & -x+z-2t & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ & & & 2\lambda_3 & - & 10\lambda_4 & = & -3x+y-4t & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 & & & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & x \\ & \lambda_2 & & & + & 4\lambda_4 & = & x+t \\ & & & 3\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & -x+z-2t \\ & & & & - & 24\lambda_4 & = & -7x+3y-2z-8t & L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{1}{8}x & - & \frac{5}{8}y & + & \frac{3}{4}z & + & t \\ \lambda_2 & = & -\frac{1}{6}x & + & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{3}z & - & \frac{1}{3}t \\ \lambda_3 & = & -\frac{1}{24}x & - & \frac{1}{8}y & + & \frac{3}{12}z & - & \frac{1}{3}t \\ \lambda_4 & = & \frac{7}{24}x & - & \frac{1}{8}y & + & \frac{1}{12}z & + & \frac{1}{3}t \end{cases} \end{aligned}$$

Les coordonnées du vecteur (x, y, z, t) dans la base (w_1, w_2, w_3, w_4) est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8}x - \frac{5}{8}y + \frac{3}{4}z + t \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{24}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z - \frac{1}{3}t \\ \frac{7}{24}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z + \frac{1}{3}t \end{pmatrix}$$

Partie C.

1. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs. Le rang de $(u_1, \dots, u_n)$ est la dimension du sous espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_n)$. On a

$$rg(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{vect}(u_1, \dots, u_n)).$$

2. Par définition du rang, on a $\dim(G) = Rg(w_0, w_1, w_2)$. Soit on calcule le rang, soit on remarque que $w_0 = -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{8}w_2$. Donc $Rg(w_0, w_1, w_2) = Rg(w_1, w_2) = 2$ car la famille (w_1, w_2) est libre (voir partie A).