Corrigé du Devoir Maison 7

Exercice 1.

1. On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in [0,2]$ ».
   - ⋆ **Initialisation.** La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie car (par hypothèse) $u_1 \in]0,1[\subset [0,2]$.
   - ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Comme $\frac{1}{n+1} > 0$, il vient $0 \leqslant \frac{u_n}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}$ et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \frac{2}{n+1}$. Or $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n+1 \geqslant 2$ donc $\frac{2}{n+1} \leqslant 1$. Finalement, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - ⋆ **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

   Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } u_n \in [0,2]}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Alors $u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$. Or $u_{n-1} \in [0,2]$ donc, le même raisonnement que celui mené àă la question 1. fournit les inégalités $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge de limite } 1}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 1$ donc $\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ce qui implique que $\boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Alors $u_n - 1 - \frac{1}{n} = \frac{u_{n-1} - 1}{n}$. D'après la question précédente, on sait que :
$$u_{n-1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
   ce qui prouve bien que $\boxed{u_n - 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$.

Problème : autour de la somme alternée

Partie A : convergence

1.
```
def SuiteS(n,a):
    S=0
    for k in range (n+1):
        S=S+(-1)**k/(k+1)**a
    return S
```
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \tag{1}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2+1)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1+1)^\alpha} \tag{2}$$
$$= \frac{1}{(2n+3)^\alpha} - \frac{1}{(2n+2)^\alpha} \leq 0 \tag{3}$$
   car la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante ($\alpha > 0$).
   La suite (S_{2n}) est une suite décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha} \\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3+1)^\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2+1)^\alpha} \\
&= \frac{-1}{(2n+4)^\alpha} + \frac{1}{(2n+3)^\alpha} \geq 0
\end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante ($\alpha > 0$).
La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $S_{2n} - S_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} = 0$

(d) D'après les trois précédentes questions, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Donc ces deux suites sont convergentes vers la même limite l_α. On vient de montrer que les suites extraites de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite l_α.

3.
```
eps=float(input("entrer une valeur  epsilon)"
S0=1
S1=S0-(1/(2)**a)
k=2
while (|S1-S0|>epsilon)
     S0=S1+(1/(k+1)**a)
     k=k+1
     S1=S0-(1/(k+1)**a)
     k=k+1
print(S1,S0)
```

4. (a) Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-x)^k \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^{2n+2}}{1+x} \qquad \text{car } x \neq 1 \\
&= \frac{x^{2n+2}}{1+x}
\end{aligned}$$

(b) On intègre entre 0 et 1 le membre droite de l'égalité précédente.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k \right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^k \, dx \quad \text{par linéarité} \\
&= \Big[\ln(1+x) \Big]_0^1 - \sum_{k=0}^{2n+1} \int_0^1 (-1)^k x^k \, dx \quad \text{par linéarité} \\
&= \ln(2) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}
\end{aligned}$$

En intégrant l'égalité de la question précédente, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(2) - S_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0,1]$,
$1 + x \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
On a donc $0 \leq \dfrac{x^{2n+2}}{1+x} \leq x^{2n+2}$ car $x^{2n+2} \geq 0$.
Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} \, dx.$$

En utilisant la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \ln(2) - S_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^1 x^{2n+2} \, dx$.

(d) Comme $\displaystyle\int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3}$, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - S_{2n+1} = 0$.
Donc $I_1 = \ln(2)$.

(e) Deux versions possibles :

```
def approxln2(epsilon):
   k=0
   while 1/(2*k+3)>=epsilon:
        k=k+1
   return SuiteS(2*k+1,1):
```

```
from math import floor

def approxln2(epsilon):
   k=floor(1/2*(1/epsilon-3))+1
   return SuiteS(2*k+1,1):
```

Partie B : une suite implicite : éléments de correction

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \ : \ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$,

par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (polynôme). On a donc $P_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = -\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$. On applique ensuite la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x$ (différente de 1 puisque $x \geq 0$).
2. On étudie le signe de la dérivée. Pour x positif $1 + x > 0$. On étudie le signe de $x^{2n} - 1$. La fonction puissance $x \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et est égale à 1 en 1. Donc $x^{2n} - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $x^{2n} - 1 < 0$ pour $0 \leq x < 1$. Donc P_n décroit strictement sur $[0,1]$ croit strictement sur $[1,+\infty[$.
3. On sépare la somme selon les k pairs et les k impairs

$$\begin{aligned}
P_n(1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=1,k \text{ pair}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1,k \text{ impair}}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2l} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2l} - \frac{1}{2l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{-1}{2l(2l-1)}
\end{aligned}$$

qui est une somme de termes strictement négatifs. Donc $P_n(1) < 0$.

4. (a) On écrit $P_{n+1}(x)$ sous forme de somme et on extrait les deux derniers termes.

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} = P_n(x) + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2}$$

ce qui donne le résultat.

(b) Preuve par récurrence en utilisant la question précédente pour l'hérédité.

5. On utilise le théorème de la bijection sur $[1,+\infty[$, $P_n(1) < 0$ et $P_n(2) \geq 0$.

II. Limite de la suite $\mathbf{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$

1. On sait que $P_n'(t) = \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$. On intègre entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^x P_n'(t)\,dt = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x)$$

car $P_n(0) = 0$.

2. On sait que $P_n(x_n) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = 0$. On utilise la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = 0$$

donc $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$.

3. On étudie la fonction $t \mapsto t^{2n} - 1 - nt^2 - n$ croissante sur $[1, +\infty[$ et nulle en 1.
4. En utilisant la question précédente, $t + 1 \geq 0$ pour $t \in \mathbb{R}^+$ et la croissance de l'intégrale ($x_n \geq 1$) :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \geq \int_1^{x_n} \frac{n(t^2-1)}{t+1}\,dt$$

or $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{n(t^2-1)}{t+1}\,dt = n\int_1^{x_n} t-1\,dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} = n\frac{(x_n-1)^2}{2}$. D'où la première inégalité demandée.

On utilise l'égalité prouvée en 2), et la croissance de l'intégrale (avec pour $t \in [0,1]$, $1 - t^{2n} \leq 1$)

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2)$$

Donc en utilisant les deux inégalités :

$$n\frac{(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2)$$

On sait que $x_n > 1$ d'où la première inégalité et le fait qu'en passant à la racine carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{(x_n-1)^2} = |x_n - 1| = x_n - 1$. On a donc bien :

$$0 < \sqrt{n}\frac{x_n-1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\ln(2)}$$

D'où l'inégalité finale.

5. On utilise le théorème des gendarmes la suite tend vers 1.