Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1:

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des suites de termes généraux suivants.

1. $a_n = \dfrac{n^2 - 6n + 3}{n^4 + 2n}$
2. $b_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$
3. $c_n = \dfrac{2^n + n}{2^n}$
4. $d_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
5. $e_n = \dfrac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n}$
6. $f_n = n^2 - n\cos n + 2$
7. $g_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$
8. $h_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Exercice n° 2:

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
2. En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice n° 3:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que cette suite est bornée.
3. Conclure quant à la convergence de cette suite.

Exercice n° 4:

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2\pi}{2}\right)$ en étudiant ses suites extraites.

Exercice n° 5:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n} + \ln n \leq h_n \leq 1 + \ln n$
   (c) En déduire un équivalent de h_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = h_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$
   (b) En déduire que les suites $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $h_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Exercice n° 6:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < b < a$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < b_n \leqslant a_n$.
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice n° 7:

1. Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux suivants convergent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} \qquad \text{et} \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} + \frac{1}{n\,!}$$

2. Déterminer, en fonction de ℓ, la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k\,!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$).

Exercice n° 8:

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}$
2. $\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+3}}$
3. $n-\sqrt{n^2+1}$
4. $n^2\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
5. $\dfrac{\sin(1/n)}{e^{\frac{2}{n}}-1}$
6. $n\ln\left(e^{-n}+1\right)$
7. $\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\sqrt{n^2+n}-n}$
8. $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$
11. $\left[1+\sin\left(\dfrac{3}{n}\right)\right]^n$
12. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice n° 9:

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} a_0 \in [2,+\infty[\\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n} \end{cases}$

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait $a_{n+1}=f(a_n)$. Étudier cette fonction sur $\mathbb{R}_+$.
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturer le comportement de la suite.
3. Montrer que pour tout $x\in\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$, on a $\sqrt{1+x}\leqslant x$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a_n\in\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$.
5. Étudier le sens de variation de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite.

Exercice n° 10:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-x^2$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1}=f(x_n)$.

1. Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite et émettre une conjecture quant à son comportement.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x_{2n}\in\left[0,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $x_{2n+1}\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$.
4. Étudier le signe de la fonction $g : x\longmapsto f(f(x))-x$ sur $[0,1]$.

5. En déduire le sens de variation des suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Je me perfectionne !

Exercice n° 11:

Pour chaque terme général proposé, préciser si la suite est convergente ou divergente et donner la valeur de la limite en cas de convergence.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$;
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$.
3. $u_n = \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

Exercice n° 12:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrer que la fonction f_n admet un unique zéro dans l'intervalle $[0, 1]$. On le note a_n.
2. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conclure quant à la convergence de cette suite.
   Indication : on comparera, pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.
3. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1.

Exercice n° 13:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x} \end{array} \right.$

1. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Étudier le signe de $f_{n+1}(x_n)$. En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Étudier le signe de $f_n(n)$. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Exprimer x_n en fonction de e^{-x_n}. En déduire un équivalent de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $+\infty$.

Exercice n° 14:

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\,(1-u_n) \end{array} \right.$$

o'u u_n modélise le nombre de tortues, au début de l'année $2000 + n$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
4. Ecrire un programme python qui affiche la dernière année avant laquelle l'espèce est menacée d'extinction.

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06 v_n (1 - v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. Ecrire un programme python prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie une liste contenant les n premiers termes dans une liste.
3. Déterminer une fonction f tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   (a) Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ et les variations de f sur $[0, 1]$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0; \alpha]$ avec α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   (c) Montrer que, la suite (v_n) est croissante. En déduire la convergence de la suite.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n).
5. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 15:

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$. On calculera notamment la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Déterminer les éventuels points fixes de f sur $\mathbb{R}_+$. *On appelle point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$ tout nombre réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = x$.*
5. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sur un graphique à l'échelle adaptée. Sur l'axe des abscisses, on se limitera à l'intervalle $[0, 2]$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$$

1. (a) Écrire en langage `python` une fonction récursive `U` qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) Écrire en langage `python` une fonction `ListeTermes` qui prend en paramètre un entier naturel N et qui renvoie une liste de tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de u_0 à u_N.
2. Conjecturer graphiquement la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On fera notamment apparaître les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique de la question* 5. *de la* **Partie A**.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leqslant 1$.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie C : recherche d'un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans cette dernière partie, on souhaite déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel p non nul, on a :
$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p+1}$$
2. En déduire par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{u_n} \leqslant n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$
5. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$$
6. Montrer enfin que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n+1 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant n+2+\ln(n)$$
7. Conclure.