Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1: Calculer les produits de matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

$$E = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -8 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2: Déterminer tous les produits possibles de deux matrices parmi celles ci-dessous. On ne demande pas de calculer ces produits

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

1. Trouver toutes les matrices X vérifiant $AX = B$.
2. Trouver toutes les matrices X vérifiant $XA = B$.

Exercice n° 4: Déterminer l'écriture matricielle des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x + 6y - 2z = 0 \\ -x + z = 5 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2x_2 \\ 4x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x - 11y = a \\ 4y + z = b \end{cases}$$

Exercice n° 5: Calculer la transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 6: Déterminer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 7: Inverse de matrice de taille 2

Pour chaque matrice suivante, déterminer si elle est inversible et si oui donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 8: Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 9: polynôme annulateur

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^3. En déduire que B n'est pas inversible.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $C^3 - 4C^2 + C + 6I_3$. En déduire que C est inversible et donner C^{-1}.

4. Généralisation : Soit A une matrice carrée de taille k et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme tel que $P(A) = 0_k$.
   (On dit que P est un polynôme annulateur de A).
   Montrer que si $a_0 \neq 0$ alors A est inversible et donner son inverse.

Exercice n° 10: Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs du paramètre λ pour lesquelles la matrice n'est pas inversible

$M = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -7 \\ 2 & 3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}$

Exercice n° 11:

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ En décomposant A sous la forme $A = N + I_3$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer R^n en écrivant $R = 2J - I_3$ où J est la matrice carrée de taille 3 dont tous les coefficients valent 1.

Je me perfectionne !

Exercice n° 12: Suites et matrices

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère deux suites (x_n) et (y_n) définies par x_0, y_0 et les relations de récurrence $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + y_n \end{cases}$

   On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   (a) Etablir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

   (b) En déduire une relation entre X_n et X_0.

   (c) Déterminer alors une expression de x_n et y_n en fonction de n.

Exercice n° 13:

1. On considère une population de rongeurs femelles vivant 3 années et se reproduisant au cours de la troisième année seulement avec un taux de reproduction annuel en femelles $\tau = 4$. La probabilité de survie du groupe d'un an est $p_1 = \frac{1}{2}$. La probabilité de survie du groupe de deux ans est $p_2 = \frac{1}{2}$. On note $n_i(k)$, le nombre de rongeurs d'âge i l'année d'observation k.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $n_1(k+1), n_2(k+1)$ et $n_3(k+1)$ en fonction de $n_1(k), n_2(k), n_3(k)$.

   (b) On note $X_k = \begin{pmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ n_3(k) \end{pmatrix}$

   Montrer que $\exists A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$

(c) Donner alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de X_k en fonction de A, k et X_0.

(d) Calculer A^2 et A^3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

(e) Si initialement la population est constituée de 20 rongeurs de 1 an, de 10 rongeurs de 2 ans et de 10 rongeurs de 3 ans, déterminer la population au bout de 15 années ? 16 années ? 17 années ? 18 années ? Interpréter.

2. On considère à présent une population de rongeurs femelles vivant 3 années et se reproduisant au cours de la troisième année seulement avec un taux de reproduction annuel en femelles $\tau = 2$. La probabilité de survie du groupe d'un an est $p_1 = \frac{1}{2}$. La probabilité de survie du groupe de deux ans est $p_2 = \frac{1}{2}$.

(a) Reprendre les questions a), b), c) et d) de l'exemple précédent.

(b) Si la population initiale est constituée de 200 rongeurs de 1 an, de 100 rongeurs de 2 ans et de 150 rongeurs de 3 ans, déterminer la population au bout de 5 ans, 6 ans, 7ans et 15 ans. Interpréter.

Exercice n° 14:

Une étude concernant des insectes parasitant des forêts de conifères a donné les résultats suivants :

— Ces insectes vivent 2 années seulement et se reproduisent au cours de la deuxième année seulement avec un taux de reproduction $\tau = 8$.

— La probabilité de survie du groupe d'un an est $p = \frac{1}{2}$.

Notons $x_i(k)$ le nombre d'insectes d'âge i l'année d'observation k avec $i \in [\![1, 2]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$.

On note par ailleurs $X_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = BX_k$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de X_n en fonction de B, n et X_0.
3. Déterminer pour quelles valeurs du réel λ la matrice $B - \lambda I_2$ est non inversible. On notera λ_1 et λ_2 les solutions trouvées avec $\lambda_1 < \lambda_2$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
4. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Justifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
5. Vérifier que $PDP^{-1} = B$
6. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = PD^nP^{-1}X_0$
7. S'il y a initialement 2 insectes de deux ans et 5 insectes d'un an, calculer le nombre total d'insectes 10 ans plus tard sans traitement ou arrivée de nouveaux prédateurs.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 15:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 0$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &=& u_n + 2v_n \\ w_{n+1} &=& v_n + w_n \end{array}\right.$$

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de $P - \lambda I_3$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Écrire en langage `python` une fonction `suites` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie les valeurs de u_n, v_n et w_n.
3. Rappeler comment on peut programmer (en langage `python`) une fonction `SommeTableau` qui prend en entrée une matrice M et qui renvoie la somme des coefficients de cette matrice.
4. (a) Pour tout entier naturel n, reconnaître le produit AX_n.

   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
5. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
6. Montrer que $T = P^{-1}AP$.
7. (a) Montrer qu'il existe une matrice $N \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 2I + N$.

   (b) Déterminer les puissances successives de N.

   (c) En déduire l'expression de T^n pour tout entier naturel n.
8. (a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

   (b) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

   (c) Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice n° 16:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

Le but de ce problème est de déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = D + N$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$.

   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$.
2. (a) Déterminer la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix}$ telle que $AP = PB$.

   (b) Montrer que la matrice obtenue P est inversible et déterminer l'expression de P^{-1}.

   (c) Montrer que $A = PBP^{-1}$.

   (d) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$A^n = PB^nP^{-1}$$
3. (a) Calculer N^2 et en déduire l'expression de N^k pour tout entier naturel k.

   (b) En déduire l'expression de B^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   (c) En déduire l'expression de U_n puis celle de u_n en fonction de n.