

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Que vaut a ?
2. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(X \geq 2)$, $P(|X| \leq 1)$
3. Déterminer la loi des variables $Y = X + 1$ et $Z = |X - 1|$

Exercice n° 2:

Une urne contient 3 jetons de couleurs différentes. On tire trois fois avec remise un jeton dans l'urne. X est la variable aléatoire égale au nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de X .

Exercice n° 3:

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. Tracer la courbe représentative de F .
2. Soit X une variable aléatoire réelle ayant F comme fonction de répartition. Déterminer le tableau de la loi de probabilité de X .
3. Calculer $P(X \leq 0)$.
4. Soient Y et Z les variables aléatoires réelles définies par $Y = \frac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leur courbes représentatives.

Exercice n° 4:

Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer l'expression de sa fonction de répartition et la tracer.

1. La loi de X est donnée par :

x	1	2
$P(X = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

3. La loi de Z est donnée par :

z	-1	0	1	2
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

2. La loi de Y est donnée par :

y	-1	0	1
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

4. La loi de T est donnée par :

t	-2	-1	1	4	5
$P(T = t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercice n° 5:

Pour chacune des fonctions de répartition suivantes, déterminer la loi de la variable aléatoire correspondante :

1. F_Z définie par $\forall x \in \mathbb{R}$,

2. F_U définie par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{2}{3} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 0 \leq x < 0,5 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0,5 \leq x < 0,75 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 0,75 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice n° 6:

Pour chacune des expériences suivantes, reconnaître une loi usuelle et préciser les paramètres :

1. On lance un dé équilibré. X est le résultat du lancer.
2. Un lion mange à chaque repas une gazelle avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ ou un zèbre avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Soit X le nombre de zèbres mangés sur 10 repas consécutifs.
3. On tire une à une les cartes d'un jeu de 32 cartes, jusqu'à obtenir le valet de pique. On note X le nombre de tirages effectués.
4. Un QCM contient 20 questions avec pour chacune trois réponses possibles dont une seule est correcte. On répond au hasard et on note X le nombre de réponses correctes.
5. Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire successivement et avec remise p boules et X est le nombre de boules noires obtenues sur ces p tirages.
6. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaire et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses de l'animal sorti.

7. On dispose d'un trousseau de 7 clés mais on ne sait pas laquelle ouvre la porte. On les essaye une par une en mettant de côté chaque clé essayée. X est le nombre d'essai pour trouver la bonne clé.
8. On range aléatoirement n objets dans 5 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le 2ème tiroir.

Exercice n° 7:

10% d'une population est constituée de gauchers. On considère un groupe de n personnes tirées au hasard et on note X le nombre de gauchers dans ce groupe.

1. Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la probabilité que dans le groupe il y ait au moins un gaucher ?
3. Quelle est la probabilité que dans le groupe il y ait autant de gauchers que de droitiers ?

Exercice n° 8:

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S = U_1 + U_2$ et $T = U_1 - U_2$.

1. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice n° 9:

On a n tiroirs numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). Le tiroir k contient k billets numérotés de 1 à k euros. On choisit au hasard un tiroir puis un billet dans ce tiroir.

Soit T le numéro du tiroir choisi et B la valeur du billet pioché.

1. Calculer $P(T = B)$.
2. Déterminer la loi de B et $E(B)$.

Exercice n° 10:

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[[1, n]]$.

1. Calculer $P(X = Y)$
2. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice n° 11:

On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0, 1[$. On effectue n lancers indépendants. On considère les variables aléatoires réelles :

- X égale au lancer où on obtient le premier pile et 0 si on obtient que des faces ;
- Y égale au lancer où on obtient le deuxième pile et 0 sinon.

1. Montrer que pour tout $q \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$$

2. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance.
3. Déterminer pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P(X = i \cap Y = j)$. En déduire la loi de Y .

Exercice n° 12:

Dans une émission de télévision, un individu prétend posséder des pouvoirs paranormaux et propose de le prouver en réalisant une expérience en direct. Il demande à chaque téléspectateur de lancer 10 pièces de monnaie. Grâce à ses dons, il dit être capable de contrôler à distance les pièces, de façon à ce qu'elles tombent toutes du même côté. Pendant l'émission, plus de 1500 téléspectateurs téléphonent et affirment avoir observé le phénomène. Doit-on être troublé par ce résultat ? C'est ce que nous allons étudier.

1. Quelle est la probabilité p que l'expérience réussisse pour un téléspectateur ?
2. On note n le nombre de téléspectateurs. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de téléspectateurs pour lesquels l'expérience est réussie. quelle est la loi de X ? Donner l'espérance m de X et σ son écart type en fonction de n et p .

Exercice n° 13:

Une urne contient 101 boules numérotées de 0 à 100. On tire une boule au hasard dans l'urne.

1. Soit X le numéro porté par la boule tirée. Quelle est la loi de X ?
2. Soit Y la distance de X à 50. Exprimer Y en fonction de X puis déterminer la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de Y et la variance de Y .

Exercice n° 14:

Soit W une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$. Déterminer $E(W^2)$ et $E\left(\frac{1}{W+1}\right)$

Je me perfectionne!

Exercice n° 15:

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans \mathbb{N} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_X(t) = E(t^X)$

1. Justifier que f est deux fois dérivable puis montrer que $f'_X(1) = E(X)$ et $f''_X(1) = E(X(X-1))$
2. Retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètre n et p à l'aide de f_X .

Exercice n° 16:

On lance n fois une pièce de monnaie dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0, 1[$. Si on obtient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ piles on gagne 2^k euros. Combien gagne-t-on en moyenne à ce jeu ?

Exercice n° 17:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère G une variable aléatoire telle que $G(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$ et telle que, avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall k \in G(\Omega), P(G = k) = \frac{1}{n} - \alpha|k - n - 1|$$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Déterminer α . Puis calculer l'espérance et la variance de G .
3. Calculer la probabilité $P(G \in \llbracket m, 2n + 2 - m \rrbracket)$

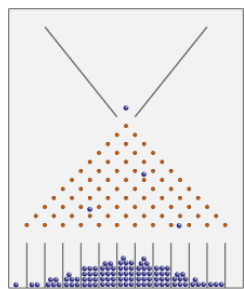
Exercice n° 18:

Une réserve comporte des animaux d'une même espèce au sexe difficilement discernable dont 2 seulement sont des mâles et n sont des femelles. On procède à des captures successives d'un animal à la fois et on arrête une fois que les deux mâles ont pu être marqués. On note X le nombre total d'animaux qui ont dû être capturés. On note pour $i \in \llbracket 0, n + 2 \rrbracket$, M_i l'événement : "le i ème animal capturé est un mâle."

1. Déterminer l'univers image de X et justifier que pour tout $k \in X(\Omega)$:

$$(X = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[\left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} M_i \right) \cap M_j \cap M_k \right]$$

2. En déduire la loi de X
3. On suppose que le temps de capture est inversement proportionnel au nombre d'animaux encore libres : il faut $\frac{1}{n+2}$ pour capturer le premier animal, $\frac{1}{n+1}$ pour capturer le suivant etc. On note T le temps total pour marquer les deux mâles. Justifier que $T = \sum_{j=1}^X \frac{1}{n+3-j}$ et calculer son espérance.

Exercice n° 19:

La planche de Galton est une planche sur laquelle sont plantés des clous suivant un schéma pyramidal. On fait tomber une bille qui a, au niveau de chaque clou, autant de chance de passer à droite qu'à gauche. En bas de la pyramide, la bille tombe dans un des $(n+1)$ tubes numérotés de 0 à n de gauche à droite.

On note X la variable aléatoire égale au tube dans lequel est tombé la bille.

1. Déterminer la loi de X .
2. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
3. Dans une kermesse, un jeu consiste à lancer une bille en haut d'une planche de Galton. Le joueur obtient un gain $G = |n - 2X|$ en euros (Les cases les plus extrêmes rapportent donc le plus). Combien doit coûter au maximum une partie si on veut que le jeu soit favorable au joueur, pour $n=6$.

Exercice n° 20:

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On définit les variables aléatoires $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ qui sont égales à 1 si le numéro obtenu au i -ème tirage n'a jamais été tiré avant et 0 sinon.

Pour $i \geq 1$ on définit T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i ème tirage.

1. Pour $i \geq 1$ donner la loi de T_i .
2. Donner la loi de U_2
3. Montrer que pour tout $i \geq 2$ $P(U_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$ et vérifier que cette formule est valable pour $i = 1$.
4. Pour tout entier $k \geq 2$, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages
 - (a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction des variables U_i
 - (b) En déduire l'espérance de $V_k(n)$.

Indication : on admettra la propriété de linéarité de l'espérance (que nous verrons dans un chapitre ultérieur) : pour une suite de variables aléatoires X_i : $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$

(c) Calculer les limites de $E(V_k(n))$ quand n tend vers $+\infty$ puis quand k tend vers $+\infty$.

Exercice n° 21:

On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces. On note Y le maximum des deux chiffres obtenus et Z le minimum. Donner les lois de Y et Z . Calculer leur espérance.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 22:

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours 10 boules.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- B_n l'événement "la n -ième boule tirée est blanche" ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n , c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

Partie A : Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 10x_{n+1} = 9x_n + 3 + n$$

1. Ecrire une fonction `suite` de paramètres `n` et `x1` (le premier terme de la suite (x_n)) et qui renvoie x_n .
2. Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha n + \beta$.
Déterminer les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ appartienne à A .
3. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite appartenant à A , $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1 et n .

Partie B : Modélisation informatique

1. Ecrire une fonction python `simulB` qui prend en entrée deux nombres entiers `nb` et `np` et simule un unique tirage dans une urne contenant `nb` boules blanches et `np` boules noires. On renvoie 0 si la boule tirée est blanche et 1 si elle est noire.
2. Ecrire une fonction python `simulXn` qui prend en entrée un nombre entier `n` et qui simule la variable aléatoire X_n . Cette fonction simulera le tirage de `n` boules et renverra sur cette expérience la valeur prise par X_n .
3. Ecrire une fonction python `simuleXn` qui prend en entrée deux nombres entiers `n` et `M` et qui renvoie une estimation de l'espérance de X_n à l'aide de `N` réalisations de la variable aléatoire X_n . Cette fonction devra utiliser la fonction `simulXn`.
4. Ecrire une fonction python `urneBlanche` qui prend en entrée un nombre entier `n`. Cette fonction simule une réalisation de l'expérience décrite dans le problème. Elle renvoie `N` si `n < N` et `n` sinon, où `N` désigne le nombre de tirages strictement nécessaires pour que l'urne ne contienne que des boules blanches.

Partie C : Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

1. Donner les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1 .

2. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \frac{4 - u_1}{10}$.

3. Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq 7$.

Montrer que, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1})$ est égale à $\frac{3 + n - k}{10}$.

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{3 + n - u_n}{10}$.

4. Soit n un entier naturel vérifiant $n > 7$.

Si $k \in \llbracket 0, n - 8 \rrbracket$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si $k \in \llbracket n - 7, n \rrbracket$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) = \frac{3 + n - k}{10}$.

Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{3 + n - u_n}{10}$ est encore vérifiée.

Partie D : Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$

1. Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier $k \in \llbracket n-6, n \rrbracket$ l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{7-n+k}{10} \mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{4+n-k}{10} \mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-7$ et pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-8 \rrbracket$.

2. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la partie A.
3. Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de n .
4. Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n \geq 1}$?

Exercice n° 23:

Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne. Les tirages étant numérotés de 1 à N , on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2 . On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.
2. Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket^2, \quad P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. (a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}.$$

et

$$\forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

- (b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. Démontrer que la variable aléatoire $T = N+1 - X_2$ a la même loi que X_1 .