BCPST1 # Corrigé du Devoir Surveillé 6

Exercice 1.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\begin{aligned} v_n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} - n = |n|\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} - n \\ = n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} - n \qquad (\text{car } n \geqslant 0) \\ = n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = 0$ donc $\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$. Par produit, on a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{3}{2n}$.

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{2n} = 1}$.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $\ln\left(\cos\left(\frac{4}{n}\right)\right) = \ln\left(1+\left[\cos\left(\frac{4}{n}\right)-1\right]\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{4}{n}\right)-1\right] = \cos(0)-1 = 0$ donc $\ln\left(1+\left[\cos\left(\frac{4}{n}\right)-1\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{4}{n}\right)-1$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n} = 0$ donc $1-\cos\left(\frac{4}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2$.

Donc $\ln\left(\cos\left(\frac{4}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{16}{2n^2}$. Par produit, il vient $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -8$. On peut donc conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -8}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on a $x_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3n} = 0$, on a donc $\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n}$ puis, par produit, $n\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}$. Par composition des limites, il vient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{X\to-1/3} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}}$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$a_{n+1}-b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2-4a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(a_n+b_n) > 0$ (car $a_n > 0$ et $b_n > 0$) et $(a_n-b_n)^2 \geq 0$ car la fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}-b_{n+1} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)} \geq 0$ par quotient de quantités positives.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - b_n \geq 0$. De plus, $a_0 > b_0$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1}-a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \leq 0$ d'après la question 2.

Donc (a_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$b_{n+1}-b_n = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} - b_n = \frac{2a_nb_n - b_n(a_n+b_n)}{a_n+b_n} = \frac{a_nb_n - b_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n)} \geq 0$ car $b_n > 0$ par énoncé, $a_n \geq b_n$ d'après 2) et $2a_n + b_n > 0$ par énoncé.

Donc (b_n) est décroissante.

4. (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, (a_n) converge vers un réel ℓ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a_n$ d'après 2. Comme (a_n) est décroissante, $a_n \leq a_0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq a_0$. Donc (b_n) est majorée par a_0. de plus, (b_n) est croissante. Donc d'après le théorème de la limite monotone, (b_n) converge vers un réel ℓ'.

5. on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell'$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{\ell+\ell'}{2}$.

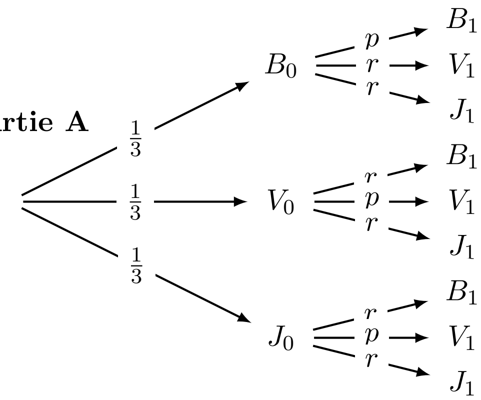
Par unicité de la limite, $\frac{\ell+\ell'}{2} = \ell \Longleftrightarrow \ell+\ell' = 2\ell \Longleftrightarrow \ell = \ell'$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell - \ell = 0$. Comme (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante, on en déduit que les suite (a_n) et (v_n) sont adjacentes.

Problème 1.

Partie A

1. L'arbre des deux premières générations donne :



2. Dans le système complet d'évènements (B_1, V_1, J_1), $P_{B_0}(B_1) + P_{B_0}(V_1) + P_{B_0}(J_1) = 1$.
Donc $1 = p + 2r$ donc $p = 1 - 2r$.

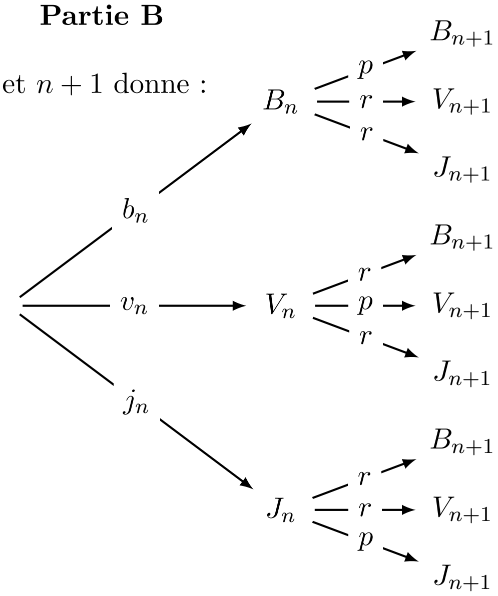
3. $\boxed{b_0 = P(B_0) = \frac{1}{3}}$ d'après l'énoncé.
Dans le système complet d'évènements de probabilités non nulles (B_0, V_0, J_0), on utilise la formule des probabilités totales :
$b_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) + P(V_0) \times P_{V_0}(B_1) + P(J_0) \times P_{J_0}(B_1)$
d'où $b_1 = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}r$. Or $p = 1-2r$ donc $\boxed{b_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r = \frac{1}{3}}$

4. B_0 et B_1 indépendants $\Leftrightarrow P(B_0 \cap B_1) = P(B_0) \times P(B_1)$. Or, par la formule des probabilités composées $P(B_0 \cap B_1) = \frac{1}{3}p$
D'où $P(B_0 \cap B_1) = P(B_0) \times P(B_1) \Leftrightarrow \frac{1}{3}p = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = p$.
Or $p = 1 - 2r$. Donc $r = \frac{1-p}{2}$. Donc $p = \frac{1}{3} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$
Ainsi $\boxed{B_0 \text{ et } B_1 \text{ indépendants si et seulement si } p = r = \frac{1}{3}}$.

5. On cherche $P_{B_1}(B_0)$. Comme B_0 et B_1 sont deux évènements de probabilités non nulles, d'après la formule de Bayes, on a : $P_{B_1}(B_0) = \frac{P(B_0)\times P_{B_0}(B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}\times p}{\frac{1}{3}} = p = \frac{1}{2}$
Finalement $\boxed{P_{B_1}(B_0) = \frac{1}{2}}$

Partie B

1. L'arbre pondéré associé aux générations n et $n+1$ donne :



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche $P(B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$
Comme $P(B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \neq 0$, on peut utiliser la formule des probabilités composées :
$P(B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) \times \cdots \times P_{B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$
$P(B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \frac{1}{3} \times p \times \cdots \times p$
Ainsi $\boxed{P(B_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \frac{1}{3} \times p^n}$

3. Dans le système complet d'évènements de probabilités non nulles (B_n, V_n, J_n), on peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilités des évènements B_{n+1}, V_{n+1} et J_{n+1} :
$P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(B_{n+1}) + P(J_n) \times P_{J_n}(B_{n+1})$
$P(V_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(V_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(J_n) \times P_{J_n}(V_{n+1})$
et $P(J_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(J_{n+1}) + P(V_n) \times P_{V_n}(J_{n+1}) + P(J_n) \times P_{J_n}(J_{n+1})$
soit en utilisant les notations de l'énoncé : $\boxed{\begin{array}{l} b_{n+1} = pb_n + rv_n + rj_n \\ \\ v_{n+1} = rb_n + pv_n + rj_n \\ \\ j_{n+1} = rb_n + rv_n + pj_n \end{array}}$

4. Posons $M = \begin{pmatrix} p & r & r \\ r & p & r \\ r & r & p \end{pmatrix}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, MX_n = \begin{pmatrix} p & r & r \\ r & p & r \\ r & r & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pb_n + rv_n + rj_n \\ rb_n + pv_n + rj_n \\ rb_n + rv_n + pj_n \end{pmatrix}$
Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n}$

5. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$. On le démontre facilement par récurrence.

Partie C

1. Si on tape `aleatoire(1/2,1/4)`, la fonction renvoie le nombre 0 (couleur bleue) avec une probabilité $\frac{1}{2}$, le nombre 1 (couleur verte) avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ (puisque x est compris entre 1/2 et 3/4) et le nombre 2 (couleur jaune) avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ (probabilité restante pour faire un total de 1).

2.
```
def simulation(n):
    L=[0]
    a=0
    for i in range(n):
        if a==0:     #si la perruche est bleue
            a=aleatoire(1/2,1/4)  #p qu'elle reste bleu, r verte, r jaune
        elif a==1:   #si la perruche est verte
            a=aleatoire(1/4,1/2)  #r qu'elle reste bleue, p verte, r jaune
        else:        #si la perruche est jaune
            a=aleatoire(1/4,1/4)  #r qu'elle reste bleue, r verte, p jaune
        L.append(a)
    return L
```

3.
```
def compteur (L):
        nb = 0           #initialisation du compteur
        for i in range(len(L)):  #parcours de la liste
            if L[i]==0:
                nb = nb+1  #incrémentation du compteur
        return nb
```

4. Il faut taper `compteur(simulation(20))`.

Partie D

1. $U^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = U$. On a de plus $\boxed{U^0 = I}$
On conjecture que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$. On le montre facilement par récurrence.

2. On a $\boxed{M = \frac{3}{4}U + \frac{1}{4}I}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminons M^n. Comme $\frac{3}{4}U$ et $\frac{1}{4}I$ commutent, on a d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{3}{4})^k U^k (\frac{1}{4})^{n-k} I^{n-k} \\
&= \frac{1}{4^n} I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\frac{3}{4})^k U^k \frac{1}{4^{n-k}} I^{n-k} \\
&= \frac{1}{4^n} I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\frac{3}{4})^k \frac{1}{4^{n-k}} U \\
&= \frac{1}{4^n} I + (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{3}{4})^k \frac{1}{4^{n-k}} - \frac{1}{4^n}) U \\
&= \frac{1}{4^n} I + ((\frac{3}{4} + \frac{1}{4})^n - \frac{1}{4^n}) U \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{M^n = \frac{1}{4^n} I + \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) U \text{ et } M^0 = I}$

Partie E

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $PX = Y$ d'inconnue X

$$PX = Y \iff \left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & + x_2 & & = y_1 & & \mathrm{L}_1 \\ x_1 & & + x_3 & = y_2 & & \mathrm{L}_2 \\ x_1 & - x_2 & - x_3 & = y_3 & & \mathrm{L}_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & + x_2 & & = y_1 & & \mathrm{L}_1 \\ & - x_2 & + x_3 & = y_2 & - y_1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ & - 2x_2 & - x_3 & = y_3 & - y_1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & + x_2 & & = y_1 & & \mathrm{L}_1 \\ & - x_2 & - x_3 & = y_2 & - y_1 & \mathrm{L}_2 \\ & & - 3x_3 & = y_3 & - 2y_2 + y_1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{llll} x_1 = & \frac{1}{3}y_1 & + \frac{1}{3}y_2 & + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = & \frac{2}{3}y_1 & - \frac{1}{3}y_2 & - \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = & -\frac{1}{3}y_1 & + \frac{2}{3}y_2 & - \frac{1}{3}y_3 \end{array} \right.$$

Le système associé à l'équation matricielle $PX = Y$ est un système de Cramer. Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Par produit, on a $PD = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Puis, on trouve $PDP^{-1} = M$

3. Par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ la propriété : "$M^n = PD^nP^{-1}$."
<u>Initialisation :</u>
$M = PDP^{-1}$ donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie et montrons $\mathcal{R}(n+1)$ vraie.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \times M \\
&= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= PD^nDP^{-1}, \text{ car } \quad P^{-1}P = I_3 \\
&= PD^{n+1}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie
Ainsi d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = PD^nP^{-1}.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.

   On a $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4^n} \\ 1 & -\frac{1}{4^n} & -\frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$. On obtient donc $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1+\frac{2}{4^n}}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1+\frac{2}{4^n}}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1+\frac{2}{4^n}}{3} \end{pmatrix}$.

Partie F

1. La matrice X_0 vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$X_n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{4})^n + \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & (\frac{1}{4})^n + \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} & (\frac{1}{4})^n + \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{4})^n + \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \\ \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3} \end{pmatrix}.$$

   On obtient donc après simplification : $\boxed{b_n = \frac{1+2(\frac{1}{4})^n}{3}, v_n = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3}, j_n = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3}}$

2. Comme $|\frac{1}{4}| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$

   Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}, \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{3}, \lim\limits_{n \to +\infty} j_n = \frac{1}{3}.}$ A long terme la répartition des couleurs devient équiprobable.

3. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \leq \frac{4}{10}$

   $$\begin{aligned} \frac{1+2(\frac{1}{4})^n}{3} \leq \frac{4}{10} &\Leftrightarrow (\frac{1}{4})^n \leq \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow n \ln(\frac{1}{4}) \leq \ln(\frac{1}{10}) \text{ car la fonction logarithme est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{1}{10})}{\ln(\frac{1}{4})} \text{ car } \ln(\frac{1}{4}) < 0. \end{aligned}$$

   Ainsi on a $\boxed{n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(4)}}$

   Ceci donne $n \geq 2$ donc on aura une proportion de perruches bleues inférieures ou égales à $\frac{4}{10}$ dès la deuxième génération.

Problème 2.

Question préliminaire. Il ne faut pas oublier d'initialiser la suite. De plus, la fonction a deux paramètres d'entrée. Voici les deux possibilités (avec une boucle `for` ou avec une fonction récursive) :

```
def suite(n,x0) :
   x=x0
   for i in range(n) :
      x=x+1+1/(x-1)
   return x
```

```
def suite(n,x0) :
   if (n==0) :
      return x0
   else :
      return suite(n-1,x0)+1+1/(suite(n-1,x0)-1)
```

Partie A

1. Les fonctions $x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sont dérivables sur $]1, +\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur cet intervalle comme somme de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

   On en déduit le tableau de signes de f' ainsi que le tableau de variations de f :

x	1		2		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en 1^+ et en $+\infty$ sont immédiates.

2. Soit $\ell \in]1, +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} \ell \text{ est un point fixe de } f \iff f(\ell) = \ell &\iff \ell + 1 + \frac{1}{\ell - 1} = \ell \\ &\iff \frac{1}{\ell - 1} = -1 \\ &\iff \ell - 1 = -1 \\ &\iff \boxed{\ell = 0} \end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+infty} \frac{1}{x-1} = 0.$
   Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
4. Voir page 7.

Partie B

1. (a) Voir page 7. $\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ semble croissante et divergente de limite } +\infty.}$

   (b) Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « x_n est bien défini et $x_n \in]1, +\infty[$ ». Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie à l'aide d'un raisonnement par récurrence (simple).

   - ⋆ **Initialisation :** par hypothèse, $x_0 \in]1, +\infty[$ (en particulier, x_0 est bien défini) donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - ⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Comme la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a $x_n \in]1, +\infty[$. En particulier, $x_n - 1 \neq 0$ et donc $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien défini. Comme $x_n \in]1, +\infty[$, on a $x_{n+1} = f(x_n) \in f(]1, +\infty[)$. On sait d'après la question A-1. que $f(]1, +\infty[) = [4, +\infty[\subset]1, +\infty[$ donc $x_{n+1} \in]1, +\infty[$. Finalement, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - ⋆ **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

   On en conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \text{ est bien défini et } x_n \in]1, +\infty[.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} - x_n = 1 + \dfrac{1}{x_n - 1}$. Or $x_n \in]1, +\infty[$ d'après la question précédente donc $x_n > 1$ puis $\dfrac{1}{x_n - 1} > 0$. Par conséquent, $x_{n+1} - x_n \geqslant 1 > 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est (strictement) croissante.}}$$

2. (a) On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons ℓ la limite de cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < x_0 \leqslant x_n$ (puisque la suite est croissante). En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $1 < x_0 \leqslant \ell$ et donc $\ell > 1$. On sait ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1}$$

   En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité, on obtient $\ell = \ell + 1 + \dfrac{1}{\ell - 1}$ d'où l'on déduit l'égalité $\ell = 1$ ce qui est absurde (puisque $\ell > 1$). Finalement, $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.}}$

(b) On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et n'est pas convergente. D'après le théorème de la limite monotone, cette suite ne peut pas être majorée. Elle est donc divergente vers $+\infty$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.